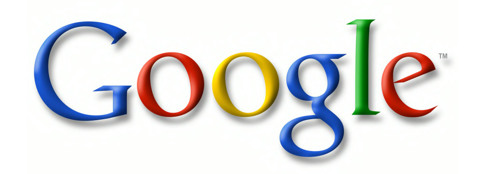




ELEMENTOS

DE

TRIGONOMETRÍA

RECTILÍNEA Y ESFÉRICA

ESCRITOS EN FRANCÉS

POR P. L. CIRODDE

PROFESOR DE MATEMÁTICAS EN EL COLEGIO REAL DE ENRIQUE IV

Traducidos al castellano

POR D. MANUEL MARÍA BARBERY

Director de Seccion del cuerpo de Telégrafos,
antiguo alumno de la Academia especial de Ingenieros del Ejército,
Director de Caminos vecinales, Maestro académico de Obras por la Nacional de
San Fernando, Bachiller en Artes, Profesor de Matemáticas,
Fortificacion y Geografía, etc., etc.



Sexta edicion.

MADRID

CARLOS BAILLY-BAILLIERE

LIBRERO DE LA UNIVERSIDAD CENTRAL, DEL CONGRESO DE LOS SRES. DIPUTAD
Y DE LA ACADEMIA DE JURISPRUDENCIA Y LEGISLACION.

LIBRERÍA ESTRANJERA Y NACIONAL, CIENTÍFICA Y LITERARIA.

Plaza de Topete, n.º 10.

Paris, J. B. Bailliere é hijo.—*Lóndres*, Bailliere.

1873.

ELEMENTOS

DE

TRIGONOMETRÍA

RECTILÍNEA Y ESFÉRICA.

CAPÍTULO PRIMERO.

NOCIONES PRELIMINARES.

1. *La* TRIGONOMETRIA *tiene por objeto la resolucion de los triángulos*; esto es, *la determinacion de los valores numéricos de sus ángulos y lados por medio de un número suficiente de datos.*

2. La geometría elemental da un medio para la resolucion de este problema; porque enseñándonos á construir un triángulo, cuando se conocen tres de sus seis *elementos*, con tal de que entre los datos haya por lo menos un lado, bien se comprende que, si despues de haber construido sobre el papel un triángulo semejante al que se busca, se llevan las incógnitas sobre la *escala* de que nos hayamos servido si estas son líneas, ó sobre el *trasportador*, si son ángulos, se obtendrán valores aproximados de dichas incógnitas. Mas los instrumentos de que hay que valerse son siempre inexactos por mas cuidado que se haya puesto en su construccion, y por lo mismo, los resultados que con su auxilio se obtienen, son únicamente aproximados, y nunca llegan al grado de precision que se necesita. Por el contrario, conseguiríanse valores para las incóg-

nitas con tanta exactitud como se quisiese, si pudieran *construirse unas fórmulas que diesen los de las partes desconocidas en el triángulo que se resuelve, en funcion de los datos de la cuestion.* Este es el problema que la trigonometría se propone, y cuya solucion vamos á desarrollar completamente.

3. Los primeros geómetras que se propusieron calcular los elementos desconocidos de un triángulo en funcion de los que se dan conocidos, tuvieron que detenerse ante la dificultad de establecer ecuaciones entre los ángulos y los lados del triángulo. Pero observando que existe una relacion indispensable entre un arco y su cuerda, y que, conociendo una de estas cantidades, se deduce de ella necesariamente la otra, consiguieron descomponer el problema general de la trigonometría en dos partes enteramente distintas. La primera parte tiene por objeto la construccion de una tabla dividida en dos columnas, de las cuales, la una contiene todos los arcos, empezando por cero y creciendo por grados muy pequeños hasta la semi-circunferencia, y la otra las cuerdas que corresponden á estos arcos. Para mayor sencillez, se puede suponer que los arcos se han trazado con un radio igual á la unidad lineal. Bien se comprende que, consultando esta tabla, podrá hallarse la cuerda de un arco dado, y recíprocamente, del mismo modo que con una tabla de logaritmos se pasa del logaritmo al número y de este á aquel. En la segunda parte del problema se trata de hallar relaciones entre los lados de un triángulo y las cuerdas de los arcos que miden sus ángulos. Tal era el sistema de trigonometría fundado por Hipparco (*); pero los árabes, y despues los modernos, le perfeccionaron considerablemente, reemplazando las cuerdas de los arcos con otras líneas que tienen con estos una relacion tan íntima como las cuerdas. Vamos á definir estas *líneas trigonométricas*, y, despues de que hagamos conocer ciertas fórmulas, de las cuales algunas son inútiles para la resolucion de los triángulos, pero de

---

(*) Se comprende fácilmente de qué modo pudo este gran astrónomo calcular las tablas de cuerdas de que acabamos de hablar. En efecto, habiendo dado Arquímedes una fórmula para determinar la cuerda que subtiende á la mitad de un arco cuando se conoce la de este arco, es fácil, partiendo de la sexta parte de la circunferencia que tiene por cuerda la unidad, llegar á calcular el valor de la cuerda de un arco tan pequeño como se quiera; de modo que tomando este arco por unidad, se deducirán de él las cuerdas de los arcos doble, triple, cuádruplo, quintuplo....; y se llegará así á la que subtiende á la semicircunferencia.

grande utilidad en diversas partes de las matemáticas, daremos medios para construir las *tablas trigonométricas*, y terminaremos por las fórmulas que expresan las relaciones que existen entre los lados de un triángulo y las líneas trigonométricas de sus ángulos.

4. Adoptaremos la division sexagésimal de la circunferencia; es decir, que supondremos á esta dividida en 360°, cada grado en $60'$, y cada minuto en $60''$. Como, además, consideraremos las mas de las veces que los arcos están descritos con un radio igual á la unidad lineal, representaremos por la letra π la longitud de la semi-circunferencia, pues empleándose ordinariamente dicha letra para designar la relacion de la circunferencia al diámetro, sirve tambien para expresar la longitud de la semi-circunferencia que tenga por radio la unidad.

5. Sea ABA'B'A (*Fig.* 1) una circunferencia cualquiera, en la que los dos diámetros AA' y BB' se cortan en ángulo recto. Si, á partir del punto A, considerado como *origen*, tomamos sobre esta circunferencia un arco cualquiera AM, y desde su *extremidad* M bajamos la perpendicular MP al diámetro AA', esta perpendicular es lo que se llama el *seno* del arco AM. De modo que *el seno de un arco es la perpendicular bajada desde su extremidad al radio que pasa por su origen.*

6. Prolonguemos la MP hasta M'''; claro es que el seno MP es mitad de la cuerda MM''', de manera que *el seno de un arco es la mitad de la cuerda que subtiende al arco doble.* Por esta razon, la construccion de una tabla de senos viene á ser la construccion de una de cuerdas, y *vice-versa.*

De aquí se deduce que sen $30^{\circ}=\frac{1}{2}R$, llamando R al radio del círculo ABA'B'A; pues este seno es la mitad de la cuerda que subtiende al arco de 60°, es decir, á la sexta parte de la circunferencia.

7. Si en la extremidad del radio OA se tira la tangente AT que termine en su encuentro con la prolongacion del radio OM, esta AT será la *tangente trigonométrica*, y OT la *secante* del arco AM. Así, *la* TANGENTE *de un arco es la parte que las direcciones de los radios que pasan por sus extremidades interceptan en la tangente levantada en una de ellas; y la* SECANTE *es la recta que, yendo desde el centro á la extremidad del arco, termina en la interseccion con la tangente tirada en*

8. Complemento de un arco es, segun ya sabemos, lo que falta al arco para valer un cuadrante; de modo que si el arco es mayor de 90°, su complemento será negativo.

Llamaremos COSENO, COTANGENTE *y* COSECANTE *de un arco al seno, tangente y secante de su complemento.* Así que siendo MB complemento del arco AM, el coseno, cotangente y cosecante de este último, serán respectivamente MQ, BS, y OS.

Observando que MQ=OP, puede decirse que *el coseno de un arco es igual á la distancia que hay desde el centro al pié del seno.*

9. Si representamos por a el arco AM, su complemento estará representado por $(90° - a)$: de manera que las anteriores definiciones del coseno, cotangente y cosecante de un arco, se expresarán algebráicamente por las fórmulas

$$\cos a = \operatorname{sen}(90° - a),$$
$$\cot a = \operatorname{tang}(90° - a),$$
$$\operatorname{cosec} a = \sec(90° - a).$$

Y tambien tendremos evidentemente estas otras:

$$\operatorname{sen} a = \cos(90° - a),$$
$$\operatorname{tang} a = \cot(90° - a),$$
$$\sec a = \operatorname{cosec}(90° - a),$$

porque puede considerarse que el arco a es el complemento de $(90° - a)$.

10. Antes de que pasemos más adelante, conviene que fijemos las ideas acerca de la interpretacion que se da en geometría á las cantidades negativas. Sean A y B (*Fig.* 2) dos puntos fijos situados sobre la recta indefinida UV, y M uno que se mueve sobre esta recta. Si llamamos a, x é y las distancias respectivas AB, AM y MB, es claro que se tendrá, cuando M esté á la derecha de B, que

$$x = a + y,$$

y cuando venga á ocupar una posicion M' situada entre A y B, que

$$x = a - y$$

y finalmente, cuando se halle en M'' á la izquierda de A, dará su distancia á este punto la ecuacion

$$x = y - a.$$

Vemos, pues, que se necesitan tres ecuaciones para determinar la distancia de M á A en las distintas posiciones que el primero puede tomar. Pero considerando como positivas las distancias que se cuenten en la direccion UV, y como negativas las contadas en la VU, la sola fórmula

$$x=a+y,$$

bastará para determinar la distancia desde M á A en todas las posiciones que M pueda ocupar, y será por lo mismo la fórmula general. Con efecto, si dicho punto viene á M', serán $x=+AM'$, $y=-BM'$, y sustituyendo en la ecuacion, resultará

$$+AM'=AB-BM',$$

lo que es cierto, pues el segundo miembro de esta igualdad significa que el punto móvil se alejó de A una cantidad AB en la direccion UV, y que retrocedió en seguida en la direccion contraria VU una cantidad BM'; de manera que su distancia actual al punto A es AM', que debe ir precedida del signo $+$, porque está contada en la direccion UV.

Si el punto M estuviese en M'', se tendria que $x=-AM''$, $y=-BM''$ y la ecuacion $x=a+y$ se reduciria á

$$-AM''=AB-BM'',$$

que es una identidad, por la misma razon que la de que acabamos de ocuparnos.

Por lo tanto, *para generalizar las fórmulas, convendremos en afectar con signos contrarios á dos distancias que se cuenten en sentidos directamente opuestos en una misma línea, ya sea recta ó curva.* Mas tarde volveremos á ocuparnos de este principio para darle todo el desarrollo que su importancia exige (*Geom. anal.*, **34**).

11. Síguese de aquí que suponiendo positivos los arcos que se cuenten en el sentido AB (*Fig.* 1), serán negativos los contados desde A hácia B', y que tomando como positivas todas las líneas trigonométricas de un arco que sea menor que el primer cuadrante, habrá que afectar con el signo $+$ á los senos de los arcos que tengan su extremidad por encima del diámetro AA' y con el $-$ á los de aquellos cuya extremidad se encuentre debajo de dicho diámetro. Así es que el seno del arco ABM' es $+M'P'$, al paso que el de ABM'' es $-M''P'$.

Se verá igualmente que las tangentes de los arcos que terminan en el primero ó en el tercer cuadrante, son positivas; y negativas las de los que terminan en los otros dos.

Respecto á secantes, son positivas las de los arcos terminados en el primero y cuarto cuadrante, y por consiguiente irán precedidas del signo +; así como pondremos el — á las de los que terminen en los otros cuadrantes. Con efecto, la secante sigue la misma direccion en el primer y cuarto cuadrante que el radio que va á la extremidad del arco; y al contrario, en los terminados en el segundo y cuarto, sigue la direccion de la prolongacion del radio.

Siendo el coseno de un arco la perpendicular bajada desde su extremo al diámetro BB', los de los arcos que terminen en los cuadrantes primero ó cuarto, serán positivos, y los de los otros negativos. Por consiguiente, la secante y el coseno de un arco tienen el mismo signo.

Por último, es fácil conocer que la cotangente y tangente de un mismo arco tienen el mismo signo, así como tambien el seno y la cosecante.

12. Sean AM y AM''' dos arcos *cualesquiera* iguales y de signos contrarios. Sus extremos estarán sobre una misma cuerda perpendicular al diámetro AA', la cual quedará cortada por este en dos partes iguales, de las que una será el seno del arco AM, y la otra lo será del AM''': de modo que *cuando dos arcos son iguales y de signos contrarios, tambien sus senos son iguales y de contrario signo*; lo cual se consigna en la fórmula

$$\text{sen } a = -\text{sen } (-a).$$

Los arcos AM y —AM''' tienen respectivamente por complementos

$$AB - AM = BM, \quad \text{y} \quad AB - (-AM''') = BM''':$$

de manera que los complementos de los arcos a y $-a$ tienen su orígen comun en B, y terminan en una misma paralela al diámetro BB', por lo cual sus senos serán iguales; mas estos senos son cosenos de los a y $-a$: luego ya tenemos la fórmula general

$$\cos a = \cos (-a),$$

lo que quiere decir que *los cosenos de dos arcos iguales y de signos contrarios, son iguales y del mismo signo.*



Con la misma facilidad se establecerán las fórmulas

$$\text{tang}\, a = -\text{tang}(-a), \quad \cot a = -\cot(-a)$$
$$\sec a = \sec(-a), \quad \text{cosec}\, a = -\text{cosec}(-a).$$

13. Vamos ahora á examinar *cómo varian las líneas trigonométricas de un arco, cuando este crece desde cero hasta el infinito positivo, ó hasta el infinito negativo* (*). Nos limitaremos por ahora á considerar arcos positivos en virtud de las fórmulas establecidas en el n.° (12); no ocupándonos tampoco mas que de los senos y cosenos, porque muy pronto daremos á conocer fórmulas con las cuales se valúan fácilmente la tangente, cotangente, secante y cosecante de un arco cuando se conoce su seno y coseno (21 y 22), de modo que con tales fórmulas será fácil deducir de las variaciones del seno y coseno las de cualquiera otra línea trigonométrica de aquel arco (25).

Supongamos que el punto M coincida con el orígen A de los arcos : el arco a será nulo, como igualmente su seno; pero el coseno será igual al radio : luego si

$$a = 0, \quad \text{sen}\, a = 0, \quad \cos a = R.$$

Si suponemos que *el punto* M *va describiendo el arco* y marcha hácia el B, se irá alejando del diámetro AA′ y aproximándose al BB′ : luego el seno de AM aumentará, pero disminuirá el coseno y podremos establecer que

si a aumenta, $\text{sen}\, a$ aumenta, $\cos a$ disminuye.

Cuando el punto *generador* M llegue á B, el seno MP se habrá hecho igual al radio OB; mas el coseno MQ se habrá anulado : luego

$$\text{si } a = 90^\circ, \quad \text{sen}\, a = R, \quad \cos a = 0.$$

Conviene observar que, si a vale 45°, el triángulo rectángulo OMP es isósceles, por lo cual el seno de 45° es igual al coseno del mismo arco; y siendo por el teorema de Pytagoras, $PM = \frac{R}{\sqrt{2}} =$

(*) Siendo cada uno de los ángulos de un triángulo menor que dos rectos, el arco que lo mida no puede esceder de la semi-circunferencia; mas como el uso de las fórmulas trigonométricas no se limita solo á la resolucion de triángulos, segun ya hemos dicho (3), sino que se las emplea en otra porcion de problemas, hay que considerar que los arcos pueden ser positivos ó negativos y de cualquiera magnitud.

$\frac{R}{2}\sqrt{2}$, se tendrá

$$\text{sen } 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{R}{2}\sqrt{2}.$$

Continuando el movimiento del punto M al otro lado de B, se irá aproximando al diámetro AA' y alejándose de BB': de modo que el seno de a disminuirá, y el coseno aumentará en valor absoluto: digo en valor absoluto, porque este coseno será negativo hasta que M haya pasado del punto B' (11). Luego

si a aumenta, $\text{sen } a$ disminuye, y $\overline{\text{cosen } a}$ aumenta.

(El signo — que hemos colocado encima de cosen a, indica que este es negativo).

Cuando el punto M haya llegado á A', el seno de a es cero, lo mismo que en A, y el coseno volverá á ser igual al radio, pero tomado negativamente. Así diremos que

si $a = 180^\circ$, $\text{sen } a = 0$, $\cos a = -R$.

Antes de pasar mas adelante, observaremos que los senos y cosenos del arco a han vuelto á pasar desde 90° á 180° por los mismos valores absolutos que ya habian tenido desde 0° á 90°; y que estos valores eran iguales cuando las extremidades de los arcos correspondientes se hallaban situadas en una misma paralela al diámetro AA'. Así es que los arcos AM y ABM' tienen senos iguales y de los mismos signos, al paso que los cosenos se diferencian en los signos. Pero como los arcos AM y ABM' son *suplementarios*, una vez que su suma compone una semi-circunferencia, podemos establecer que

Los senos de dos arcos suplementarios son iguales.

Los cosenos de dos arcos suplementarios son iguales; pero tienen signos contrarios, lo cual se consigna algebráicamente en las dos siguientes fórmulas:

$$\text{sen}(180^\circ - a) = \text{sen } a \quad \text{y} \quad \cos(180^\circ - a) = -\cos a.$$

Continuando la hipótesis de que el punto M sigue moviéndose y que pasa mas allá del A', fácilmente veremos que

si a crece, sin llegar á 270°,	$\overline{\text{sen } a}$ crece,	$\overline{\cos a}$ decrece,
$a = 270^\circ$,	$\text{sen } a = -R$,	$\cos a = 0$,
a crece, sin llegar á 360°,	$\overline{\text{sen } a}$ decrece,	$\cos a$ crece,
$a = 360^\circ$,	$\text{sen } a = 0$,	$\cos a = R$.

Finalmente, si el punto generador M continúa su movimiento, se tendrán arcos mayores que la circunferencia y cuyas líneas trigonométricas serán evidentemente las mismas que las de los arcos que dicho punto trazó en su primera circunvolucion, puesto que M volverá á pasar sucesivamente por todas las posiciones que ya entónces habia tomado. De lo cual hay que deducir que *las líneas trigonométricas de un arco no cambian, cuando á este se añade cualquier número de circunferencias.*

Resumiendo lo que dejamos dicho en la discusion que precede, se puede establecer que *los senos crecen con los arcos correspondientes en el primer y tercer cuadrante, y decrecen en el segundo y cuarto. Lo contrario sucede á los cosenos cuya marcha es inversa de la de los senos.*

14. De esto se deduce que hay una infinidad de arcos que tienen una misma línea trigonométrica, y que ha de ser muy importante establecer las fórmulas generales que los comprendan. Si, en virtud de la observacion hecha al principio del n.° (13), queremos limitarnos á hallar los arcos á quienes corresponde un mismo seno ó coseno, no hay mas que resolver el problema siguiente :

Dado el seno, ó el coseno de un arco correspondiente á una circunferencia conocida, hallar este arco.

Sean ABA'B' (*Fig.* 1) la circunferencia dada y *m* la longitud del seno dado. Trácense dos diámetros rectangulares AA' y BB', y suponiendo que A es el orígen de los arcos, tómese sobre BB' una distancia $OQ = m$, tirando despues por Q la cuerda MM' paralela al diámetro AA'. Claro es que todos los arcos positivos ó negativos, que principiando en A terminen en M, ó en M', tendrán su seno igual á *m*, y serán los únicos que tendrán este seno. La cuestion queda pues reducida á buscar las fórmulas en que esten comprendidos todos estos arcos.

Para conseguirlo *llamemos* α *al menor de todos los arcos positivos que tengan por seno á* m, de modo que si este arco es AM, se tendrá $AM = \alpha$, y entonces el AM', que es su suplemento, estará representado por $\pi - \alpha$. Pero es evidente que obtendremos todos los arcos cuya extremidad caiga en M, añadiendo á AM un número *indeterminado* de circunferencias, ya sean positivas ó negativas : luego todos estos arcos estan comprendidos en la fórmula $2k\pi + \alpha$, siendo *k* un número *entero* cualquiera, positivo ó negativo. Del mismo modo se veria que la expresion algebráica de todos los arcos que



hayan de terminar en M′ es

$$2k\pi+\pi-\alpha=(2k+1)\pi-\alpha.$$

Por lo tanto las dos fórmulas

$$2k\pi+\alpha, \quad \text{y} \quad (2k+1)\pi-\alpha,$$

resuelven el problema.

Si en vez de ser positivo el seno m, como hemos supuesto, fuese negativo, no habria más diferencia en lo que precede, que en lugar de llevarle desde O hácia Q sobre OB, le llevariamos desde O hasta Q′ sobre OB′, y vendriamos á tener las mismas fórmulas, con tal que siempre designemos por α al menor de todos los arcos positivos que tengan $-m$ por seno.

15. Observando que la diferencia entre dos arcos que esten ambos comprendidos en la primera, ó ambos en la segunda de las fórmulas anteriores, es un número par de semi-circunferencias; al paso que la suma de dos arcos de los cuales uno esté comprendido en una de dichas fórmulas y el otro en la otra, es un múltiplo impar de la semi-circunferencia, deduciremos este importante teorema.

Para que dos arcos tengan el mismo seno, es necesario, y suficiente, que su diferencia sea un número par de semi-circunferencias, ó que su suma sea un número impar de estas. Así que, designando por a un arco cualquiera positivo ó negativo, todos los que tengan el mismo seno que él, estarán comprendidos en una de las dos fórmulas siguientes

$$2k\pi+a \quad \text{ó} \quad (2k+1)\pi-a,$$

de manera que

$$\text{sen}\,(2k\pi+a)=\text{sen}\,a, \quad \text{y} \quad \text{sen}\,[(2k+1)\pi-a]=\text{sen}\,a.$$

Mas en estas fórmulas puede cambiarse a en $-a$, y como sen $(-a)=-\text{sen}\,a$ (12), tendremos

$$\text{sen}\,(2k\pi-a)=-\text{sen}\,a, \quad \text{y} \quad \text{sen}[(2k+1)\pi+a]=-\text{sen}\,a.$$

Reuniendo estas dos fórmulas con las precedentes, resultarán las

$$\text{sen}\,(2k\pi\pm a)=\pm\,\text{sen}\,a \qquad [1],$$
$$\text{sen}\,[(2k+1)\pi\pm a]=\mp\,\text{sen}\,a \qquad [2],$$

en cuyas ecuaciones hay que tomar, ó los signos superiores en ambos miembros, ó en los dos, los inferiores.

16. Ocupémonos ya de la determinacion de los arcos que tienen por coseno una línea dada n. Tomarémos para esto sobre el diámetro AA′ una parte $OP=n$; tiraremos por P una paralela al diámetro BB′, y los puntos M y M‴ en que esta corte á la circunferencia, serán los extremos de los arcos que, principiando en A tengan por coseno la longitud n. Vamos, pues, á buscar las fórmulas de todos estos arcos. Si representámos el AM por α, AM‴ lo estará por $2\pi-\alpha$, de modo que obtendremos todos los que terminen en M y en M‴, añadiendo un número cualquiera de circunferencias positivas ó negativas á cada uno de los arcos α y $2\pi-\alpha$, con lo que hallaremos

$$2k\pi+\alpha \quad \text{y} \quad 2k\pi-\alpha,$$

ó reuniendo en una las dos

$$2k\pi\pm\alpha;$$

fórmula que tambien corresponde al caso en que sea negativo el coseno que se dió conocido.

17. Si se observa que ya se resten dos arcos comprendidos ambos en una ó en otra de estas fórmulas, ó ya se sumen dos que uno esté comprendido en la primera y el otro en la segunda, siempre hallaremos un número par de semi-circunferencias; podremos establecer este teorema:

Para que dos arcos tengan el mismo coseno, es necesario, y suficiente, que su suma ó su diferencia sea un múltiplo par de la semi-circunferencia. Así que, llamando a á un arco cualquiera positivo ó negativo, todos los que tengan el mismo coseno que él, estarán en la fórmula

$$2k\pi\pm a,$$

de modo que puede consignarse que

$$\cos(2k\pi\pm a)=\cos a \qquad [3].$$

Si á cualquier arco se añade media circunferencia, el que resulte y el primitivo terminarán en los extremos de un mismo diámetro, y por consiguiente, tendrán iguales los cosenos, aunque de signos contrarios; mas por esta adicion, el arco $2k\pi\pm a$ viene á convertirse en $(2k+1)\pi\pm a$: luego

$$\cos[(2k+1)\pi\pm a]=-\cos a \qquad [4].$$

18. Siendo ciertas las fórmulas [2] y [4], cualquiera que sea el valor positivo ó negativo que se dé á k, puede hacerse en ellas $k=0$, y tendremos

$$\text{sen}(\pi-a)=\text{sen } a, \quad \cos(\pi-a)=-\cos a.$$

las cuales generalizan completamente el teorema que en la pág. (8) no habiamos podido establecer mas que para arcos positivos y menores que media circunferencia; pero ahora queda aplicable á cualesquiera, porque los a y $(\pi-a)$ son suplementarios, y a representa un arco positivo ó negativo de cualquiera magnitud.

19. Cuando sea necesario conocer el signo que corresponde al segundo miembro de las fórmulas [1], [2], [3] y [4], basta hacer en el primero $k=0$ y ver á qué se reduce. Suponiendo $k=0$ en la expresion $\text{sen}[(2k+1)\pi\pm a]$, se tiene $\text{sen }(\pi\pm a)$; mas diferenciándose a y $(\pi+a)$ en media circunferencia, terminarán en los extremos de un mismo diámetro, y tendrán por consiguiente senos iguales y de signos contrarios; los de a y $(\pi-a)$ serán completamente iguales, porque estos arcos son suplementarios; luego $\text{sen }(\pi\pm a)=\mp\text{sen } a$, y vuelve á hallarse en su consecuencia la fórmula

$$\text{sen }[(2k+1)\pi\pm a]=\mp\text{sen } a.$$

20. Las [1], [2], [3] y [4] manifiestan que *el cálculo del seno ó del coseno de cualquiera arco puede referirse siempre al del seno ó coseno de uno positivo menor que un cuadrante*; pues es evidente que puede mirarse á todo arco como un múltiplo de la semi-circunferencia aumentado ó disminuido este múltiplo en un arco menor que un cuadrante; de modo que, en virtud de las citadas fórmulas, su seno ó coseno será igual á *mas* ó *menos* el seno ó coseno de este arco menor que un cuadrante. Si, por ejemplo, se quiere el seno de 1422 grados, se dividirá 1422 por 180, y como el resíduo 162° pasa de 90°, se *forzará la unidad* sobre el cociente 7, de modo que se tendrá $1422°=180°.8-18°$, y como $180°.8$ es un múltiplo par de la semi-circunferencia, será el $\text{sen } 1422°=-\text{sen } 18°$.

21. Ahora vamos á establecer las relaciones que ligan entre sí á las diferentes líneas trigonométricas de un mismo arco.

Primeramente, si consideramos el triángulo rectángulo OMP (*Fig.* 1), cuyos dos catetos son respectivamente el seno y el coseno

de un arco cualquiera $AM = a$, tendremos

$$\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = R^2.$$

En seguida, observando que los dos triángulos OMP y OTA son semejantes, podémos establecer entre sus lados homólogos la siguiente série de razones iguales

$$MP : AT :: OP : OA :: OM : OT,$$

ó bien $$\operatorname{sen} a : \operatorname{tang} a :: \cos a : R :: R : \sec a.$$

En las cuales se saca de la proporcion formada por las dos primeras razones, que

$$\operatorname{tang} a = R \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a},$$

y de la que forman las dos últimas, que

$$\sec a = \frac{R^2}{\cos a}.$$

Debemos observar que estas dos fórmulas dan los valores absolutos de tang a y sec a, cualesquiera que sean la magnitud y el signo del arco a; porque en los dos triángulos rectángulos OMP y OAT siempre serán iguales los ángulos en O á causa de que los tres puntos O, P, A están constantemente en línea recta, como sucede tambien á los O, M, T, por lo cual nunca dejarán de ser semejantes los dichos triángulos.

Esas mismas fórmulas serian ciertas aun en el caso de que no existiesen los triángulos OPM y OAT, como llegaria á suceder si el arco a se hiciera un múltiplo del cuadrante. En efecto, si este múltiplo fuera par, se tendria

$$\operatorname{sen} a = 0, \quad \cos a = \pm R, \quad \operatorname{tang} a = 0, \quad \sec a = \pm R,$$

y si fuera impar

$$\operatorname{sen} a = \pm R, \quad \cos a = 0, \quad \operatorname{tang} a = \infty, \quad \sec a = \infty \ (*),$$

y estos valores satisfacen aun á las mismas fórmulas.

Por consiguiente, para comprobar su generalidad, no hay

(*) Efectivamente, si un arco termina en B ó en B′, coincidiendo entonces la direccion de la secante con la del diámetro BB′, será esta secante paralela á la tangente TOT′, de modo que puede considerarse que estas dos líneas se cortan á una distancia infinita.

nias que examinar si los signos de los segundos miembros concuerdan en todo con los de los primeros. Pero considerando la fórmula $\tang a = R\frac{\operatorname{sen} a}{\cos a}$ se ve que cuando el arco a tenga su extremo en el primero ó en el tercer cuadrante, el segundo miembro será positivo, como el primero, y que, al contrario, ambos serán negativos cuando a termine en el segundo ó cuarto cuadrantes (11). Por esto la fórmula $\tang a = R\frac{\operatorname{sen} a}{\cos a}$ es cierta en todos los casos. Otro tanto se diria de la ecuacion $\sec a = \frac{R^2}{\cos a}$.

22. Aplicando estas dos fórmulas al arco $\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$, se hallan las ecuaciones

$$\tang\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = R\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)}, \quad \sec\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \frac{R^2}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)},$$

que se reducen á

$$\cot a = R\frac{\cos a}{\operatorname{sen} a}, \quad \operatorname{cosec} a = \frac{R^2}{\operatorname{sen} a},$$

porque $\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$ es el complemento de a. Es evidente que estas dos fórmulas últimas gozan de la misma generalidad que aquellas de que se las ha deducido.

23. Si en la expresion de $\tang a$ en funcion de $\operatorname{sen} a$ y de $\cos a$, se cambia a en $(k\pi \pm a)$, se hallará

$$\tang(k\pi \pm a) = R\frac{\operatorname{sen}(k\pi \pm a)}{\cos(k\pi \pm a)};$$

pero cuando k sea par, se reduce el segundo miembro de esta ecuacion á $R\cdot\frac{\pm \operatorname{sen} a}{\cos a} = \pm \tang a$; y cuando k sea impar, á $R.\frac{\mp \operatorname{sen} a}{-\cos a} = \pm \tang a$; luego siempre $\tang(k\pi \pm a) = \pm \tang a$ [5].

Igualmente veriamos que

$$\cot(k\pi \pm a) = \pm \cot a \qquad [6],$$

correspondiéndose los signos en los dos miembros de esta ecuacion y la precedente.

Las fórmulas [5] y [6] manifiestan que *para que dos arcos tengan*

una misma tangente ó cotangente, es necesario, y suficiente, que su diferencia sea un múltiplo cualquiera de la semi-circunferencia, porque la expresion general de todos los arcos que tienen la misma tangente ó cotangente que el a, es $k\pi + a$.

24. Suponiendo $k = 1$ y tomando solamente los signos inferiores se tendrá

$$\text{tang}\,(\pi - a) = -\,\text{tang}\,a, \quad \cot\,(\pi - a) = -\cot a.$$

Luego *las tangentes ó cotangentes de dos arcos suplementarios son iguales y de contrarios signos.*

Finalmente, sobre las fórmulas [5] y [6] pueden hacerse las mismas observaciones que se hicieron en el n.° (20) sobre las [1], [2], [3] y [4].

25. Para ver cómo varian la tangente, secante, cotangente y cosecante de un arco, cuando varía este, supondremos en las fórmulas de los n.os (21 y 22) que el arco a crece desde cero hasta el infinito, y como las variaciones correspondientes de sen a y cos a son conocidas (13), fácil será seguir la marcha de los segundos miembros de estas ecuaciones (convendrá mucho comprobar los resultados en la figura). Así formaremos el siguiente cuadro :

$a = 0$,	tang $a = 0$,	sec $a = R$,	cot $a = \infty$,	cosec $a = \infty$.
a crece $< 90°$,	tang a crece,	sec a crece,	cot a decrece,	cosec a decrece.
$a = 45°$,	tang $a = R$,	sec $a = R\sqrt{2}$,	cot $a = R$,	cosec $a = R\sqrt{2}$.
$a = 90°$,	$\underline{\text{tang}\,a} = \infty$,	$\underline{\sec a} = \infty$,	$\underline{\cot a} = 0$,	cosec $a = R$.
a crece $< 180°$,	$\underline{\text{tang}\,a}$ decrece,	$\underline{\sec a}$ decrece,	$\underline{\cot a}$ crece,	cosec a crece.
$a = 180°$,	tang $a = 0$,	$\underline{\sec a} = -R$,	cot $a = \infty$,	$\underline{\text{cosec}\,a} = \infty$,
a crece $< 270°$,	tang a crece,	$\underline{\sec a}$ crece,	cot a decrece,	$\underline{\text{cosec}\,a}$ decrece.
$a = 270°$,	$\underline{\text{tang}\,a} = \infty$,	sec $a = \infty$,	$\underline{\cot a} = 0$,	$\underline{\text{cosec}\,a} = -R$.
a crece $< 360°$,	$\underline{\text{tang}\,a}$ decrece,	sec a decrece,	$\underline{\cot a}$ crece,	$\underline{\text{cosec}\,a}$ crece.
$a = 360°$,	tang $a = 0$,	sec $a = R$,	cot $a = \infty$,	cosec $a = \infty$.

26. Supónese ordinariamente, para mayor sencillez, que los arcos estan descritos con un radio igual á la unidad lineal, y, bajo esta hipótesis, las fórmulas halladas en los n.os (21 y 22) se reducen á

$$\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1 \qquad [7],$$

$$\text{tang}\,a = \frac{\text{sen}\,a}{\cos a} \quad [8], \qquad \sec a = \frac{1}{\cos a} \quad [9],$$

$$\cot a = \frac{\cos a}{\text{sen}\,a} \quad [10], \qquad \text{cosec}\,a = \frac{1}{\text{sen}\,a} \quad [11].$$

27. Cuando despues de haber hallado una fórmula bajo el supuesto de que el radio fuera la unidad lineal, se quiere saber á qué se reduciria en caso de ser otro el radio (*Fig.* 3), observaremos que describiendo desde el vértice de cualquiera ángulo como centro, arcos comprendidos entre los lados de este, dichos arcos tendrán todos igual número de grados, y sus líneas trigonométricas serán proporcionales á sus radios; de modo que tendremos, por ejemplo,

$$\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{AM}}=\frac{\mathrm{M'P'}}{\mathrm{AM'}}.$$

Pero si los radios AM y AM′ son iguales el primero á la unidad y el segundo á r, representamos por b la longitud del seno de MP, y llamamos a al número de grados de los arcos MB y M′B′, se reducirá la anterior ecuacion á

$$b=\frac{\operatorname{sen} a}{r},$$

por la cual se ve que hubiera bastado sustituir en la ecuacion propuesta en lugar de b, $\frac{\operatorname{sen} a}{r}$; y como lo mismo diríamos de las otras líneas trigonométricas, podemos consignar que *para restablecer el radio en las fórmulas halladas, bajo el supuesto de que el radio es la unidad lineal, hay que sustituir, en vez de cada línea trigonométrica, la razon de esta al nuevo radio.*

Por ejemplo, si hubiéramos tenido

$$\operatorname{tang}(a+b)=\frac{\operatorname{tang} a+\operatorname{tang} b}{1-\operatorname{tang} a \operatorname{tang} b},$$

sustituiriamos respectivamente en vez de $\operatorname{tang}(a+b)$, $\operatorname{tang} a$ y $\operatorname{tang} b$ las razones $\frac{\operatorname{tang}(a+b)}{r}$, $\frac{\operatorname{tang} a}{r}$, y $\frac{\operatorname{tang} b}{r}$, con lo que hallaríamos

$$\frac{\operatorname{tang}(a+b)}{r}=\frac{\frac{\operatorname{tang} a}{r}+\frac{\operatorname{tang} b}{r}}{1-\frac{\operatorname{tang} a}{r}\cdot\frac{\operatorname{tang} b}{r}},$$

de la que fácilmente se pasa á la

$$\operatorname{tang}(a+b)=\frac{r^2(\operatorname{tang} a+\operatorname{tang} b)}{r^2-\operatorname{tang} a \operatorname{tang} b}.$$

CAPÍTULO II.

FUNCIONES CIRCULARES.

28. Como las *cinco* ecuaciones del n.º (26) contienen las *seis* líneas trigonométricas del arco a, siempre se podrán hallar cinco de ellas cuando sea conocida la otra. Para que sirva de ejemplo, nos propondremos *calcular el seno y el coseno de un arco, del cual se conoce la tangente.*

No habrá, para conseguirlo, mas que resolver las ecuaciones

$$\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1 \quad [7], \qquad \text{tang}\, a = \frac{\text{sen}\, a}{\cos a} \quad [8],$$

Para hacerlo con mas sencillez, añadiremos una unidad á los cuadrados de los dos miembros de la [8], y teniendo en cuenta lo que expresa la [7] hallaremos

$$1 + \text{tang}^2 a = 1 + \frac{\text{sen}^2 a}{\cos^2 a} = \frac{1}{\cos^2 a};$$

de la que se deduce con facilidad

$$\cos^2 a = \frac{1}{1 + \text{tang}^2 a},$$

y de esta

$$\cos a = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tang}^2 a}};$$

mas, como la ecuacion [8] da $\text{sen}\, a = \text{tang}\, a \cos a$: se tiene tambien

$$\text{sen}\, a = \pm \frac{\text{tang}\, a}{\sqrt{1 + \text{tang}^2 a}} \qquad [12].$$

En estas dos fórmulas se corresponden los signos, es decir, que cuando en la una se tome el signo superior, tambien hay que tomarle en la otra; y si en la primera tomamos el inferior, en la segunda haremos lo mismo; por consiguiente, el problema admite dos soluciones si el arco a no es conocido. Con efecto, viniendo expresados en estas fórmulas el seno y coseno de a en funcion de la tang a, tienen estas que servir para hallar el seno y coseno de cada uno de los arcos que tengan por tangente esta línea. Mas todos los

arcos que tienen la misma tangente que el a, se hallan comprendidos (23) en la fórmula

$$k\pi + a;$$

luego las que nos ocupan determinarán (15 y 17

$$\text{sen}(k\pi + a) = \pm \text{sen}\, a \quad \text{y} \quad \cos(k\pi + a) = \pm \cos a;$$

por consiguiente, es cierto que cada una nos debia dar dos valores iguales y de signos contrarios.

Pero si conociéramos cuál era el arco a no habria mas que una solucion, y examinando á qué cuadrante pertenece aquel arco, sabriamos cuál signo habia que poner al seno y al coseno de a.

Ejemplo. Sea $\text{tang}\, a = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; entonces tendremos

$$\cos a = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{sen}\, a = \mp \frac{1}{2},$$

de modo que las dos soluciones del problema son

$$\left(\cos a = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \text{sen}\, a = -\frac{1}{2}\right) \text{ y } \left(\cos a = -\frac{\sqrt{3}}{2},\ \text{sen}\, a = +\frac{1}{2}\right).$$

Si se hubiera dicho además que el arco a era de 150^0, entonces su seno seria positivo y su coseno negativo, y se tendria por consiguiente

$$\cos 150^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{sen}\, 150^0 = \frac{1}{2}.$$

29. Ocupémonos ahora en *calcular el seno y coseno de la suma de dos arcos en funcion de los senos y cosenos de estos arcos.*

1.ª Demostracion. Supongamos que $CA = a$ y $CB = b$ (*Fig.* 4) son dos arcos *cuya suma*, $BCA = a + b$ *sea menor que un cuadrante.* Bajando desde C las perpendiculares CPA′ y CQB′ á los radios OA y OB serán CP el seno y OP el coseno de a, así como CQ será el seno y OQ el coseno de b; además, por ser CA′ y CB′ arcos dobles que los CA y CB, el A′CB′ será doble del ACB, de modo que el seno de este último será la mitad de la cuerda A′B′ (6). Ahora bien, si unimos los puntos A′ y B′ con el extremo D del diámetro CD, formaremos un cuadrilátero CA′DB′ en el cual tendremos, por el teórema de Ptolomeo (en todo cuadrilátero inscribible el producto de las diagonales es igual á la suma de los productos de los lados opuestos).

$$CD.A'B' = CA'.DB' + CB'.DA',$$

la que dividida por 4, se convierte en

$$\operatorname{sen}(a+b)=\operatorname{sen} a \cos b+\operatorname{sen} b \cos a;$$

por cuanto $DB'=2OQ=2\cos b$, y $DA'=2OP=2\cos a$.

Para hallar el coseno de $(a+b)$, trazo el diámetro A'E y uno B' con E: la recta resultante B'E es doble del $\cos(a+b)$, porque siendo rectángulo el triángulo A'B'E, se tendrá

$$B'E=\sqrt{4-4\operatorname{sen}^2(a+b)}=2\cos(a+b).$$

Tiro la recta DE y formaré así el cuadrilátero CDEB', en el que se verifica que

$$CD.B'E=DB'.CE-CB'.DE,$$

de donde resulta finalmente, dividiendo por 4,

$$\cos(a+b)=\cos a \cos b-\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b.$$

(Téngase presente que CA'DE es un rectángulo).

2.ª Demostracion. Supongamos que $CA=a$ y $AB=b$ (*Fig.* 5) son dos arcos, cuya suma CB componga menos que un cuadrante. Tiremos el radio OA y la perpendicular BE á este radio, así como por A y B las AD y BF al OC, con lo cual tendremos evidentemente que

$$AD=\operatorname{sen} a,\ OD=\cos a,\ BE=\operatorname{sen} b,\ OE=\cos b,$$
$$BF=\operatorname{sen}(a+b),\ OF=\cos(a+b).$$

Hecho esto, tiremos por el punto E las EG y EI paralelas á AD y OC, y resultará

$$\operatorname{sen}(a+b)=EG+BI, \quad y \quad \cos(a+b)=OG-EI,$$

de modo que solamente falta calcular las cuatro líneas EG, BI, OG y EI en funcion de los senos y cosenos de los arcos a y b. Para esto, la semejanza de los triángulos OAD y OEG dará

$$OD:OG::OA:OE::AD:EG,$$

ó sea $$\cos a:OG::1:\cos b::\operatorname{sen} a:EG.$$

De donde se saca que

$$OG=\cos a \cos b \quad y \quad EG=\operatorname{sen} a \cos b.$$

Tambien los triángulos OAD y BEI son semejantes por tener sus lados respectivamente perpendiculares, y darán

$$OD:BI::OA:BE::AD:EI,$$

ó sea $$\cos a:BI::1:\operatorname{sen} b::\operatorname{sen} a:EI,$$

de donde $$BI=\operatorname{sen} b\cos a, \quad y \quad EI=\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b.$$

Sustituyendo en vez de EG, BI, OG y EI en los valores de sen $(a+b)$ y cos $(a+b)$, los que acabamos de hallar, tendremos:

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a \qquad [13],$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \qquad [14],$$

Estas fórmulas manifiestan:

1.° Que *el seno de la suma de dos arcos es igual á la suma de los productos que se obtienen multiplicando el seno de cada uno por el coseno del otro.*

2.° Que *el coseno de la suma de dos arcos es igual al producto de los cosenos de estos arcos, disminuido del producto de sus senos.*

30. Para probar que las fórmulas [13] y [14] son generales, basta hacer ver que son ciertas en los tres casos que siguen:

1.er Caso. *Cuando los arcos* a *y* b *sean positivos, cada uno menor que* 90°, *y su suma* (a + b) *sea mayor que un cuadrante.*

Llamemos a' y b' á los complementos respectivos de a y b, en cuyo supuesto $(a'+b')$ será el suplemento de $(a+b)$, y por consiguiente será menor que un cuadrante; luego tendremos (n.° 29)

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a'+b') = \operatorname{sen} a' \cos b' + \operatorname{sen} b' \cos a' =$$
$$\cos a \operatorname{sen} b + \cos b \operatorname{sen} a;$$
$$\cos(a+b) = -\cos(a'+b') = -\cos a' \cos b' + \operatorname{sen} a' \operatorname{sen} b' =$$
$$-\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b + \cos a \cos b.$$

Luego las fórmulas [13] y [14] convienen al caso en que, siendo cada uno de los arcos positivos menor que 90°, su suma sea mayor que un cuadrante. Así que *son ciertas para todos los valores positivos de* a *y* b *menores que* 90°.

2.° Caso. *Cuando* a *y* b *son dos arcos cualesquiera, pero positivos.*

Probando que, si las fórmulas [13] y [14] son ciertas para dos arcos cualesquiera positivos, lo serán tambien cuando á uno de ellos se añada 90°, podremos deducir que supuesto que se aplican á dos arcos a' y b' menores que un cuadrante (1.er caso), convendrán tambien á los a y b que se formen añadiendo cierto número de cuadrantes á los a' y b'.

Supongamos, pues, que a' y b sean dos arcos tales que

$$\operatorname{sen}(a'+b) = \operatorname{sen} a' \cos b + \operatorname{sen} b \cos a'$$
$$\cos(a'+b) = \cos a' \cos b - \operatorname{sen} a' \operatorname{sen} b.$$

Supongamos que $a = 90^\circ + a'$, y resultará

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(90^\circ + a' + b) = \cos(a'+b),$$
$$\cos(a+b) = \cos(90^\circ + a' + b) = -\operatorname{sen}(a'+b);$$

y tendremos, por consiguiente,

$$\operatorname{sen}(a+b) = \cos a' \cos b - \operatorname{sen} a' \operatorname{sen} b;$$
$$\cos(a+b) = -\operatorname{sen} a' \cos b - \cos a' \operatorname{sen} b.$$

Pero siendo $a = 90^\circ + a'$, será $\operatorname{sen} a = \cos a'$ y $\cos a = -\operatorname{sen} a'$; luego sustituyendo sen a por $\cos a'$ y $\cos a$ por $-\operatorname{sen} a'$, resultará por último,

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a,$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b.$$

Por lo tanto, las fórmulas [13] y [14] corresponden á cualesquiera arcos *positivos*.

3.^{er} Caso. *Cuando* a *y* b *sean dos arcos cualesquiera positivos ó negativos.*

Siempre podrán hallarse dos números n y n' enteros y positivos, bastante grandes para que los arcos $2n\pi + a$ y $2n'\pi + b$ sean positivos, de modo que se podrán aplicar las fórmulas [13] y [14] al desarrollo del seno y coseno de la suma de estos dos arcos. Por otra parte, es evidente que $\operatorname{sen}(2n\pi + a + 2n'\pi + b) = \operatorname{sen}(a+b)$, y que $\cos(2n\pi + a + 2n'\pi + b) = \cos(a+b)$; luego tendremos

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}\{(2n\pi + a) + (2n'\pi + b)\} = \operatorname{sen}(2n\pi + a)\cos(2n'\pi + b) + \operatorname{sen}(2n'\pi + b)\cos(2n\pi + a) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a,$$
$$\cos(a+b) = \cos\{(2n\pi + a) + (2n'\pi + b)\} = \cos(2n\pi + a)\cos(2n'\pi + b) - \operatorname{sen}(2n\pi + a)\operatorname{sen}(2n'\pi + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b.$$

81. Demostrada ya la verdad de las fórmulas [13] y [14] para cualesquiera valores y signos de los arcos a y b, podemos cambiar en ellas b en $-b$, y las resultantes

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a \quad [15],$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \quad [16],$$

tendrán el mismo grado de generalidad.

Las dos últimas sirven para *calcular el seno y el coseno de la diferencia entre dos arcos cualesquiera*, y hubiéramos podido deducirlas directamente por medio de una construccion geométrica, análoga á la que nos condujo á las [13] y [14] (*Fig.* 4 y 5).

32. Si en las fórmulas [13] y [14] suponemos $a=b$ se transformarán en

$$\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a \ [17]; \quad \cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a \ [18],$$

y por medio de estas se puede *calcular el seno y el coseno del doble de un arco en funcion del seno y coseno de este arco.*

33. Si en estas últimas cambiamos a en $\frac{1}{2}a$, y combinamos la segunda de las ecuaciones que resultan

$$\operatorname{sen} a = 2 \operatorname{sen} \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} \ [19], \quad \cos a = \cos^2 \frac{a}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}, \ [20],$$

con la $1 = \cos^2 \frac{a}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}$ por suma y por resta, tendremos

$$1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2} \ [21], \quad 1 - \cos a = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2} \ [22],$$

fórmulas que sirven para *calcular el seno y coseno de la mitad de un arco en funcion del coseno del arco.*

34. Combinemos las ecuaciones [13] y [15], primero por adiccion, y luego por sustraccion, y hallarémos

$$\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) = 2 \operatorname{sen} a \cos b \quad [23],$$
$$\operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b) = 2 \operatorname{sen} b \cos a \quad [24],$$

que manifiestan 1.° que *la suma de los senos de dos arcos es igual al doble producto del seno de la semi-suma de los arcos por el coseno de la semi-diferencia*; porque a es la semi-suma de los arcos $(a+b)$ y $(a-b)$, y b la semi-diferencia; 2.° que *la diferencia de los senos de dos arcos es igual al doble producto del seno de la semi-diferencia de estos arcos por el coseno de la semi-suma.*

35. Ejecutando con las fórmulas [14] y [16] las mismas operaciones que acabamos de hacer con las [13] y [15], hallarémos

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b \quad [25],$$
$$\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \quad [26].$$

Estas, que será muy conveniente traducir al lenguaje ordinario, *sirven*, así como las [23] y [24], *para trasformar en un producto de dos factores la suma ó diferencia de los cosenos ó de los senos de dos arcos;* y de consiguiente, para calcular por logaritmos esta suma ó diferencia.

36. Multiplicando miembro á miembro las [23] y [24], resulta la siguiente:

$$\operatorname{sen}^2(a+b)-\operatorname{sen}^2(a-b)=\operatorname{sen}2a\ \operatorname{sen}2b \qquad [27];$$

porque

$$2\operatorname{sen}a\cos b.2\operatorname{sen}b\cos a=2\operatorname{sen}a\cos a.2\operatorname{sen}b\cos b=\operatorname{sen}2a\ \operatorname{sen}2b.$$

Luego *la diferencia de los cuadrados de los senos de dos arcos es igual al producto del seno de la suma por el seno de la diferencia de los arcos.*

Igualmente sacariamos de las ecuaciones [25] y [26] la siguiente:

$$\cos^2(a+b)-\cos^2(a-b)=-\operatorname{sen}2a\ \operatorname{sen}2b \qquad [28].$$

Por medio de esta y de la [27] se puede *calcular por logaritmos la diferencia de los cuadrados de los cosenos ó de los senos de dos arcos.* Si fueran por ejemplo, los de 120° y 30°, tendriamos

$$\operatorname{sen}^2 120^\circ-\operatorname{sen}^2 30^\circ=\operatorname{sen}150^\circ\ \operatorname{sen}90^\circ=\operatorname{sen}30^\circ=\frac{1}{2}.$$

37. Dividiendo miembro á miembro las ecuaciones

$$\operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a-b)=2\operatorname{sen}a\cos b \qquad [23],$$
$$\operatorname{sen}(a+b)-\operatorname{sen}(a-b)=2\operatorname{sen}b\cos a \qquad [24],$$

resultará

$$\frac{\operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a-b)}{\operatorname{sen}(a+b)-\operatorname{sen}(a-b)}=\frac{\operatorname{sen}a\cos b}{\operatorname{sen}b\cos a}=\operatorname{tang}a\cot b,$$

ó bien, una vez que $\cot b=\frac{1}{\operatorname{tang}b}$, en virtud de las fórmulas [8] y [10].

$$\frac{\operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a-b)}{\operatorname{sen}(a+b)-\operatorname{sen}(a-b)}=\frac{\operatorname{tang}a}{\operatorname{tang}b} \qquad [29].$$

Donde vemos que *la suma de los senos de dos arcos es á su diferencia, como la tangente de la semi-suma de los arcos es á la tangente de la semi-diferencia de los mismos;* porque a es la semi-suma y b la semi-diferencia de los arcos $(a+b)$ y $(a-b)$.

Puede darse una demostracion de este teorema, notable por su sencillez, pero mucho menos general que la precedente. Sean $CA=a$, y $CB=b$ (*fig.* 7) los dos arcos que se consideran. Si por los puntos A y B tiramos una perpendicular AA' y una paralela BDE al diámetro OC, claro es que el arco BA' será la suma de los a y b, que BA será la diferencia, y que

$$DA'=\operatorname{sen}a+\operatorname{sen}b,\quad DA=\operatorname{sen}a-\operatorname{sen}b.$$

Pero uniendo E con A y con A′, los ángulos A′EB y AEB tendrán por respectivas medidas $\frac{a+b}{2}$ y $\frac{a-b}{2}$. Vamos, pues, á construir las tangentes de estos ángulos. Para conseguirlo, describamos desde el punto E como centro, y con un radio igual al del círculo dado, un arco de circunferencia FGF′: el ángulo A′EB tendrá por medida GF′, y el AEB, GF; luego GF′$=\frac{a+b}{2}$, y GF$=\frac{a-b}{2}$. Luego tirando K′K tangente en G, tendremos GK′$=\text{tang}\,\frac{a+b}{2}$ y GK$=\text{tang}\,\frac{a-b}{2}$. Mas la recta EB divide á AA′ y á la paralela á esta K′K en partes proporcionales; luego

$$\frac{DA'}{DA}=\frac{GK'}{GK} \quad \text{ó bien} \quad \frac{\text{sen}\,a+\text{sen}\,b}{\text{sen}\,a-\text{sen}\,b}=\frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}(a+b)}{\text{tang}\,\frac{1}{2}(a-b)}.$$

38. Dividiendo los dos miembros de la ecuacion

$$\text{sen}\,a=2\,\text{sen}\,\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} \qquad [19]$$

respectivamente por los de la

$$1+\cos a=2\cos^2\frac{a}{2}\ [21], \quad \text{ó} \quad 1-\cos a=2\,\text{sen}^2\frac{a}{2}\ [22],$$

hallarémos

$$\frac{\text{sen}\,a}{1+\cos a}=\text{tang}\,\frac{a}{2}\ [30], \qquad \frac{\text{sen}\,a}{1-\cos a}=\cot\frac{a}{2} \qquad [31];$$

y dividiendo miembro á miembro las [22] y [21] resultará

$$\frac{1-\cos a}{1+\cos a}=\text{tang}^2\frac{a}{2}\ [32], \quad \text{de donde} \quad \text{tang}\,\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}\ [33].$$

Fórmula que sirve para calcular la tangente de la mitad de un arco cuando se conoce el coseno de este. Si no se da el arco, tendrá el problema dos soluciones, como fácilmente se prevee. En efecto, como la fórmula que se pide debe espresar la tangente de la mitad del arco a en funcion de la cantidad $\cos a$, dará la tangente de todos los arcos que tengan por coseno la longitud dada $\cos a$; pero todos

estos arcos están comprendidos en la fórmula $(2k\pi \pm a)$; luego la que se buscaba determinará [23]

$$\text{tang}\,(k\pi \pm a) = \pm \text{tang}\,\frac{a}{2},$$

y debe dar dos valores iguales y de signo contrario.

Mas, si se diera conocido el arco a, la tangente de su mitad no podria tener mas que un valor, y observando en qué cuadrante se hallaba el estremo de $\frac{a}{2}$ se conoceria si en la fórmula [33] debia tomarse el signo superior ó el inferior.

39. Problema. *Dado el coseno de un arco, hallar el seno y coseno de su mitad.*

Las fórmulas

$$\text{sen}\,\frac{a}{2} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2(1-\cos a)} \qquad [34],$$

$$\cos\frac{a}{2} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2(1+\cos a)} \qquad [35],$$

que son las que resuelven este problema, resultan inmediatamente de las ecuaciones [21] y [22], é indican que habrá dos soluciones, cuando no sea conocido el arco a. Debe repetirse aquí la discusion del n.° 38.

De estas fórmulas se deduce la construccion geométrica que se usa para *dividir un arco en dos partes iguales.* En efecto, restableciendo el radio [27] en la [34], por ejemplo, hallaremos

$$\text{sen}\,\frac{a}{2} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2R(R-\cos a)}.$$

Supongamos que el arco que se quiere dividir sea AA'B (*Fig.* 8); como su coseno es $-$OP, la fórmula anterior se convertirá en

$$\text{sen}\,\frac{a}{2} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{AA'.AP}.$$

Pero $\sqrt{AA'.AP}$ es una media proporcional entre AA' y AP. Luego $\text{sen}\,\frac{a}{2} = \frac{1}{2}AB$. Por consiguiente, bajando desde O una perpendicular KOK' á AB, tendremos que $\text{sen}\,\frac{a}{2} = AI$. Este AI es el seno comun á los dos arcos AK y AK'; pero como la mitad de AA'B debe tener el seno positivo se deduce que es AK la mitad que se buscaba.

40. Problema. *Dado el seno de un arco, hallar el seno y el coseno de su mitad.*

Como sabemos que $\cos a = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 a}$; si sustituimos este valor en las fórmulas [34] y [35], tendremos las ecuaciones

$$\operatorname{sen}\frac{a}{2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2\left(1\mp\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 a}\right)},$$

y

$$\cos\frac{a}{2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2\left(1\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 a}\right)},$$

que resuelven el problema. Sin embargo, se las puede simplificar aplicándolas la fórmula

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}},$$

que sirve para calcular por medio de dos raíces cuadradas separadas, la raíz cuadrada de una cantidad que en parte es racional y en parte irracional de segundo grado (*Alg.*, 227). Para conseguirlo, supondremos que $A=2$, $B=4\,(1-\operatorname{sen}^2 a)$ y resultará de estas hipótesis que $A^2-B=4\operatorname{sen}^2 a$, y por consiguiente

$$\operatorname{sen}\frac{a}{2} = \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\operatorname{sen} a}\mp\sqrt{1-\operatorname{sen} a}\right),$$

$$\cos\frac{a}{2} = \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\operatorname{sen} a}\pm\sqrt{1-\operatorname{sen} a}\right).$$

Tambien se pueden obtener direetamente estas fórmulas, y con mas facilidad, del modo siguiente:

Las dos incógnitas $\operatorname{sen}\frac{a}{2}$, $\cos\frac{a}{2}$ y la cantidad conocida $\operatorname{sen} a$, se hallan ligadas entre sí por las dos ecuaciones

$$\operatorname{sen} a = 2\operatorname{sen}\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2},\quad 1=\operatorname{sen}^2\frac{a}{2}+\cos^2\frac{a}{2},$$

que si las sumamos resultará por segundo miembro el cuadrado de $\left(\operatorname{sen}\frac{a}{2}+\cos\frac{a}{2}\right)$, de modo que extrayendo la raíz cuadrada del primero, se hallará que

$$\pm\sqrt{1+\operatorname{sen} a} = \operatorname{sen}\frac{a}{2}+\cos\frac{a}{2}.$$

Conociendo que la suma de las dos incógnitas es $\pm\sqrt{1+\operatorname{sen} a}$ y

que su producto es $\frac{1}{2}$ sen a, los valores de aquellos serán las raíces de la doble ecuacion de segundo grado.

$$x^2 \mp \sqrt{1+\operatorname{sen} a}\,.\,x+\frac{1}{2}\operatorname{sen} a=0 \qquad [\alpha];$$

de la que se saca

$$x=\frac{\pm\sqrt{1+\operatorname{sen} a}\pm\sqrt{1-\operatorname{sen} a}}{2},$$

cuatro valores, de los cuales cada uno pertenece lo mismo á sen $\frac{a}{2}$ que á cos $\frac{a}{2}$ porque no hay mas razon para tomarle como representando á sen $\frac{a}{2}$ que por representacion de cos $\frac{a}{2}$ á causa de lo simétrico de las ecuaciones propuestas: solamente hay que agrupar estos resultados de manera que el primer radical tenga los mismos signos en los valores de estas incógnitas, y que el segundo los tenga contrarios, por cuanto cada grupo debe representar las dos raíces de una ó de otra de las ecuaciones [α]. Tendremos, pues,

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sen}\frac{a}{2}&=\frac{\pm\sqrt{1+\operatorname{sen} a}\pm\sqrt{1-\operatorname{sen} a}}{2}\\ \cos\frac{a}{2}&=\frac{\pm\sqrt{1+\operatorname{sen} a}\mp\sqrt{1-\operatorname{sen} a}}{2}\end{aligned}\right\} \qquad [36];$$

fórmulas en que se corresponden los signos del mismo radical.

Vemos que el problema admite cuatro soluciones, y era fácil preveerlo. Con efecto, la primera, por ejemplo, de las fórmulas que se buscaban, tenia que expresar el valor de sen $\frac{a}{2}$ en funcion de sen a, era preciso que determinase el seno de la mitad de cada uno de los arcos que tienen por seno la longitud dada sen a, y como todos estos arcos estan comprendidos en las fórmulas

$$2k\pi+a \quad \text{y} \quad (2k+1)\pi-a,$$

tenia que dar á conocer los valores de

$$\operatorname{sen}\left(k\pi+\frac{a}{2}\right)=\pm\operatorname{sen}\frac{a}{2} \text{ y de } \operatorname{sen}\left(k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}\right)=\pm\cos\frac{a}{2},$$

es decir, cuatro valores, $\pm \operatorname{sen}\frac{a}{2}$ y $\pm \cos\frac{a}{2}$ iguales de dos en dos y de signos contrarios.

Si fuera conocido el arco a, bien se deja ver que uno solo de los valores comprendidos en cada una de las dos fórmulas [36] puede convenir al seno ó al coseno de $\frac{a}{2}$; pero ¿cómo puede conocerse cuál ha de ser? Fácilmente conoceremos si el seno de $\frac{a}{2}$ debe ser positivo ó negativo, pues no hay mas que trasformarle en un múltiplo de la semi-circunferencia, aumentado ó disminuido de un arco menor que 90° (20). Supongamos, por ejemplo, que este seno deba ser positivo, entonces desecharemos los dos valores negativos, y como uno de los otros dos valores debe ser el sen $\frac{a}{2}$ y el restante tiene que ser $\pm\cos\frac{a}{2}$, solo faltará para evitar toda duda, examinar cuál de estas dos líneas trigonométricas tiene mayor valor absoluto, lo cual es fácil, puesto que hemos determinado un arco menor que 90°, cuyo seno y coseno son iguales en valor absoluto á los del arco $\frac{a}{2}$ (15 y 16), y en el primer cuadrante, el seno de un arco menor que 45° es menor que su coseno, mientras que sucede lo contrario cuando es mayor de 45°. Si, por ejemplo, se nos dijese que el seno de 1650° es igual á $\frac{1}{2}$, y se pidiera el seno de 825°, veriamos primeramente que 825° valen cinco semi-circunferencias menos 75°, y que por lo mismo, el seno de 825° es positivo é igual al de 75°. Pero este arco, por ser mayor que 45°, tiene mayor seno que coseno; luego

$$\operatorname{sen} 825° = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right),$$

y

$$\cos 825° = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

41. PROBLEMA. *Dado el seno de un arco, calcular el de su tercio.*

Para resolver este problema, buscaremos una relacion entre el seno de un arco y el de su tercio; y á este fin, haremos en la fórmula [13] $b=2a$, con lo que tendremos

$$\operatorname{sen} 3a = \operatorname{sen} a \cos 2a + \operatorname{sen} 2a \cos a;$$

pero como $\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a$ y $\cos 2a = 1 - 2\operatorname{sen}^2 a$,
resultará $\operatorname{sen} 3a = \operatorname{sen} a - 2\operatorname{sen}^3 a + 2 \operatorname{sen} a \cos^2 a$,
ó sustituyendo $(1 - \operatorname{sen}^2 a)$ en vez de $\cos^2 a$, y reduciendo los términos semejantes

$$\operatorname{sen} 3a = 3 \operatorname{sen} a - 4 \operatorname{sen}^3 a \qquad [37],$$

fórmula que da el seno del triple de un arco en funcion del seno del arco.

Cambiemos en ella a en $\frac{a}{3}$, y despues de haber traspuesto de miembro y dividido todos los términos por 4, se trasformará en

$$\operatorname{sen}^3 \frac{a}{3} - \frac{3}{4} \operatorname{sen} \frac{a}{3} + \frac{1}{4} \operatorname{sen} a = 0 \qquad [38],$$

ó, sustituyendo, para abreviar, x en vez de $\operatorname{sen}\frac{a}{3}$ y b en lugar de $\operatorname{sen} a$,

$$x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{b}{4} = 0 \qquad [39],$$

y resolviendo esta ecuacion, obtendremos tres valores para la incógnita $\operatorname{sen}\frac{a}{3}$, de modo que la cuestion admite tres soluciones, si son reales las tres raíces de la ecuacion [39].

Para verlo, repetiremos aquí los razonamientos que hicimos en los n.os 38 y 40, y encontraremos que esta ecuacion [39] debe tener por raíces los senos de todos los arcos que esten comprendidos en las fórmulas

$$\frac{2k\pi}{3} + \frac{a}{3} \quad \text{y} \quad \frac{(2k+1)\pi}{3} - \frac{a}{3}.$$

Pero k es un número entero de la forma $(3n + k')$, siendo n positivo ó negativo y k' un número entero positivo menor que 3; por consecuencia, tenemos

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{3} + \frac{a}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(2n\pi + \frac{2k'\pi}{3} + \frac{a}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{2k'\pi}{3} + \frac{a}{3}\right),$$

y
$$\operatorname{sen}\left\{\frac{(2k+1)\pi}{3} - \frac{a}{3}\right\} = \operatorname{sen}\left(2n\pi + \frac{2k'\pi}{3} + \frac{\pi}{3} - \frac{a}{3}\right)$$
$$= \operatorname{sen}\left(\frac{2k'\pi}{3} + \frac{\pi}{3} - \frac{a}{3}\right).$$

Haciendo en estas sucesivamente $k' = 0, = 1, = 2$, veremos que

los senos de todos los arcos determinados por la ecuacion [39] son los de los seis arcos

$$\frac{a}{3},\quad \frac{2\pi}{3}+\frac{a}{3},\quad \frac{4\pi}{3}+\frac{a}{3},$$

$$\frac{\pi}{3}-\frac{a}{3},\quad \pi-\frac{a}{3},\quad \frac{5\pi}{3}-\frac{a}{3}.$$

Pero sabemos que dos arcos tienen el mismo seno cuando su suma compone un múltiplo impar de la semi-circunferencia; luego los arcos $\frac{a}{3}$ y $\left(\pi-\frac{a}{3}\right)$, $\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{a}{3}\right)$ y $\left(\frac{\pi}{3}-\frac{a}{3}\right)$, $\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{a}{3}\right)$ y $\left(\frac{5\pi}{3}-\frac{a}{3}\right)$, tienen unos mismos senos, de modo que la ecuacion [39] tiene por raíces los senos de los tres arcos $\frac{a}{3}$, $\frac{2\pi}{3}+\frac{a}{3}$ y $\frac{4\pi}{3}+\frac{a}{3}$; por lo tanto, sus tres raíces son reales y generalmente desiguales (*).

Si queremos determinar trigonométricamente los signos que corresponden á las raíces de la ecuacion [39], distinguiremos dos casos, segun que b sea positivo ó negativo.

1.° Si $b>0$, el menor de todos los arcos positivos que tendrán por seno á b, será $<\frac{\pi}{2}$, de modo que representándole por x, tendremos:

$$\frac{x}{3}<\frac{\pi}{6},\quad \frac{x}{3}+\frac{2\pi}{3}<\frac{5\pi}{6},\quad \frac{x}{3}+\frac{4\pi}{3}<\frac{3\pi}{2};$$

así es que la ecuacion tendrá dos raíces positivas y una negativa.

Vemos además que siendo el sen $\frac{\pi}{6}$ igual á $\frac{1}{2}$ (6), será sen $\frac{x}{3}<\frac{1}{2}$, y que sen $\left(\frac{x}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)>\frac{1}{2}$, porque sen $\frac{5\pi}{6}=$ sen $\frac{\pi}{6}$ (13).

(*) Y efectivamente, la condicion $4p^3+27q^2<0$ (*Alg.*, 482) queda satisfecha, pues se reduce aquí á $b^2-1<0$, que es cierta porque b es un seno.

Aun puede decirse: si $b>0$, $x=0$ dará un resultado positivo, y $x=\frac{1}{2}$ dará $\frac{-1+b}{4}<0$; luego la ecuacion tiene dos raices positivas, una menor que $\frac{1}{2}$ y otra mayor; y como además ha de tener una negativa, tiene reales las tres. Lo mismo veriamos que si $b<0$ la ecuacion tiene dos raices reales negativas, una menor y otra mayor que $\frac{1}{2}$; no habria mas para conseguirlo que cambiar x en $-x$ en la ecuacion [39].

2.° Si $b<0$, x será $>\pi$ y $<\frac{3\pi}{2}$, de modo que tendremos entonces

$$\frac{x}{3}\left\{\begin{matrix}>\frac{\pi}{3}\\<\frac{\pi}{2}\end{matrix}\right\},\quad \frac{x}{3}+\frac{2\pi}{3}\left\{\begin{matrix}>\pi\\<\frac{7\pi}{6}\end{matrix}\right\},\quad \frac{x}{3}+\frac{4\pi}{3}\left\{\begin{matrix}>\frac{5\pi}{3}\\<\frac{11\pi}{6}\end{matrix}\right\}.$$

De modo que el seno del primero de los tres arcos es positivo, y los de los otros dos negativos, así es que la ecuacion [39] tiene entonces una raíz positiva y dos negativas. Como sen $\frac{7\pi}{6}$ y sen $\frac{11\pi}{6}$ son iguales en cuanto á valor absoluto á sen $\frac{\pi}{6}$, se ve que en el caso de $b<0$, las dos raíces negativas son, la una mayor y la otra menor que $\frac{1}{2}$.

Cuando no se conoce el arco a, no hay razon para tomar una de las raíces de la ecuacion [39] con preferencia á cualquiera de las otras para valor del seno de $\frac{a}{3}$; y el problema tendrá entonces tres soluciones.

Cuando a sea conocido, hay que buscar cuál de las tres raíces de la ecuacion [39] es el seno de $\frac{a}{3}$. Para esto, referiremos el arco $\frac{a}{3}$ al primer cuadrante (20) y hallaremos que sen $\frac{a}{3}$ es igual á $\pm$ sen x, siendo $x<90°$. Si $b>0$ y sen $\frac{a}{3}=-$ sen x, será preciso tomar para valor de sen $\frac{a}{3}$ la raíz negativa de la ecuacion [39]; pero si sen $\frac{a}{3}=+$ sen x, entonces el valor que se busca será una de las dos raíces positivas. Del mismo modo referiremos los arcos $\frac{2\pi}{3}+\frac{a}{3}$ y $\frac{4\pi}{3}+\frac{a}{3}$ al primer cuadrante, y si hallamos, por ejemplo, que sen$\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{a}{3}\right)=+$ sen B, siendo B$<90°$, tomaremos para el valor que buscamos la mayor ó la menor de las dos raíces positivas.

segun que x sea $>$ ó $<$B. Del mismo modo procederíamos cuando b fuera negativo.

Supongamos, por ejemplo, que $a=1635°$, y veremos fácilmente que $\operatorname{sen} a = \operatorname{sen}(9\pi+15°)<0$ y que por esto, la ecuacion [39] tiene una raiz positiva y dos negativas. En seguida conoceremos que $\operatorname{sen}\frac{a}{3}=-\operatorname{sen}5°$, que $\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{a}{3}\right)=-\operatorname{sen}60°$, y que en consecuencia, la menor de las dos raíces negativas es el valor de $\operatorname{sen}\frac{1635°}{3}$.

Si el arco dado a es el ABC (*Fig.* 9) y se le quiere dividir en tres partes iguales, no hay mas que tirar una paralela á AA' á una distancia de esta igual á la mayor raíz positiva de la ecuacion [39], y la parte AM de ABC que quede comprendida entre esta paralela y el punto A, será el tercio del arco ABC.

42. Las tres raíces de lá ecuacion [39] tienen la notable propiedad de que su suma algebráica es igual á cero (*), de lo que es fácil convencerse, observando que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{a}{3}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{a}{3}\right)=2\operatorname{sen}\left(\pi+\frac{a}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}=$$

$$-2\operatorname{sen}\frac{a}{3}\cdot\frac{1}{2}=-\operatorname{sen}\frac{a}{3},$$

y que por lo tanto

$$\operatorname{sen}\frac{a}{3}+\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{a}{3}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{a}{3}\right)=0.$$

Tambien puede demostrarse esta propiedad por consideraciones geométricas.

Con efecto, los estremos M, M', M'', de los arcos $AM=\frac{a}{3}$, $AM'=\frac{2\pi}{3}+\frac{a}{3}$, $AM''=\frac{4\pi}{3}+\frac{a}{3}$, son vértices de un triángulo equilátero; luego si unimos el M'' con N, medio de MM', tendremos que $OM''=2ON$; por consiguiente M''P, seno del arco AA'M'', es doble que la perpendicular NQ levantada en N al diámetro AA';

(*) Ya se sabe que, cuando una ecuacion carece de segundo término, la suma de sus raices es cero (*Alg.*, 453).

as esta es la semi-suma de los senos de los arcos de **AM** y de **M'**; luego queda demostrada la proposicion.

43. Hemos dicho que las tres raíces de la ecuacion [39] son por lo general desiguales. Vamos ahora á examinar qué hipótesis hay que hacer sobre sen a, á fin de que dicha ecuacion tenga dos raíces iguales. Para que esto suceda, es necesario que los senos de dos de los tres arcos $\frac{a}{3}$, $\frac{2\pi}{3}+\frac{a}{3}$, $\frac{4\pi}{3}+\frac{a}{3}$, sean iguales, y por lo tanto, que la diferencia de dos de estos arcos sea un múltiplo par de la semi-circunferencia, ó bien que su suma sea un múltiplo impar. Pero los tres arcos de que se trata no pueden satisfacer á la primera de estas condiciones, y para que verifiquen la segunda, es necesario que se tenga

$$\frac{2a}{3}+\frac{2\pi}{3}=(2k+1)\pi,\quad \text{de donde}\quad a=(6k+1)\frac{\pi}{2};$$

$$\text{ó bien}\quad \frac{2a}{3}+\frac{4\pi}{3}=(2k+1)\pi,\quad \text{en cuyo caso}\quad a=(6k-1)\frac{\pi}{2};$$

$$\text{ó tambien}\quad \frac{2a}{3}+\frac{6\pi}{3}=(2k+1)\pi,\quad \text{y entonces}\quad a=(6k-3)\frac{\pi}{2}.$$

Ahora bien, todo número impar es de la forma $(6k+1)$, $(6k-1)$ ó $(6k-3)$, porque dividiendo un número tal por 6, solamente se puede tener por resíduo 1, 3 ó 5 : luego para que la ecuacion [39] tenga dos raíces iguales, es necesario, y suficiente, que el arco a sea un múltiplo impar del cuadrante, ó en otras palabras, que sen $a=\pm 1$ (*).

44. Problema. *Dado el coseno de un arco, calcular el de su tercio.* Razonando como en el n.° **41**, hallaremos primeramente

$$\cos 3a=4\cos^3 a-3\cos a \qquad [40],$$

y despues

$$\cos^3\frac{a}{3}-\frac{3}{4}\cos\frac{a}{3}-\frac{1}{4}\cos a=0 \qquad [41].$$

(*) Con efecto, la ecuacion [39] se reduce entonces á $x^3-\frac{3}{4}x\pm\frac{1}{4}=0$; y como se conoce al momento que esta tiene por raíz á ∓ 1, su primer miembro será divisible por $(x\pm 1)$, dando por cociente $x^2\mp x+\frac{1}{4}=\left(x\mp\frac{1}{2}\right)^2$. Así, además de la raíz ∓ 1, tendrá otras dos iguales á $\pm\frac{1}{2}$.

La discusion de esta fórmula es completamente igual á la de la ecuacion [38].

45. Imitando la marcha que seguimos en el n.° **41**, será fácil expresar sen $\frac{a}{3}$, cos $\frac{a}{3}$, sen $\frac{a}{7}$, cos $\frac{a}{7}$,.... en funcion de sen a ó de cos a; pero se puede hallar una ecuacion que dé de un modo general el valor de sen $\frac{a}{m}$ ó de cos $\frac{a}{m}$ en funcion de sen a ó cos a. La manera de llegar á ella se deduce de un importantísimo teorema debido al geómetra francés MOIVRE, teorema que ha recibido el nombre de su autor.

Vamos á dar á conocer su enunciado y demostracion.

***46.** Si tenemos las dos expresiones

$$\cos a+\sqrt{-1}\operatorname{sen} a \quad \text{y} \quad \cos b+\sqrt{-1}\operatorname{sen} b,$$

y multiplicamos una por otra, hallaremos

$$(\cos a\cos b-\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b)+\sqrt{-1}\,(\cos a\operatorname{sen} b+\operatorname{sen} a\cos b)\ ;$$

luego en virtud de las fórmulas [13] y [14],

$$(\cos a+\sqrt{-1}\operatorname{sen} a)\,(\cos b+\sqrt{-1}\operatorname{sen} b)$$
$$=\cos(a+b)+\sqrt{-1}\operatorname{sen}(a+b).$$

Así vemos que el producto de dos factores de la forma $(\cos a+\sqrt{-1}\operatorname{sen} a)$ es de la misma forma que cada factor, y que se le obtiene con solo cambiar en uno de estos el arco que lleva, por la suma de los dos arcos que se considera. Dedúcese de aquí que el producto de tres factores $(\cos a+\sqrt{-1}\operatorname{sen} a)$, $(\cos b+\sqrt{-1}\operatorname{sen} b)$ y $(\cos c+\sqrt{-1}\operatorname{sen} c)$ será

$$\cos(a+b+c)+\sqrt{-1}\operatorname{sen}(a+b+c),$$

y así sucesivamente. Segun esto, si queremos elevar á la potencia m el binomio $(\cos a+\sqrt{-1}\operatorname{sen} a)$, como esto equivale á formar el producto de m factores iguales á este binomio, bastará reemplazar en él ma en vez de a, y resultará

$$(\cos a+\sqrt{-1}\operatorname{sen} a)^m=\cos ma+\sqrt{-1}\operatorname{sen} ma \qquad [42].$$

Tal es la fórmula que se conoce con el nombre de *Teorema de Moivre*. La demostracion que acabamos de dar de él, supone que m es un número entero y positivo; mas como solamente en este caso

necesitaremos de esta fórmula, omitiremos el manifestar como puede probarse su generalidad (*Alg.*, **661**).

*47. Si desarrollamos el primer miembro de la ecuacion [42], por la fórmula del binomio de Newton, y sacamos á $\sqrt{-1}$ por factor comun de las cantidades á quienes multiplica, hallaremos una ecuacion de la forma

$$\cos ma + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,ma = \text{A} + \text{B}\sqrt{-1};$$

pero esta ecuacion se descompone en las dos siguientes

$$\cos ma = \text{A} \quad \text{y} \quad \text{sen}\,ma = \text{B},$$

porque, como se saca de ella que

$$(\cos ma - \text{A}) = -\sqrt{-1}\,(\text{sen}\,ma - \text{B}),$$

si cos ma no fuera igual á A, la diferencia de estas dos cantidades reales seria imaginaria. Por lo tanto, sustituyendo en vez de A y B las cantidades que representan, resultará por último (*).

$$\left.\begin{aligned}\cos ma = \cos^m a - \frac{m(m-1)}{1.2}\cos^{m-2} a\,\text{sen}^2 a \\ + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\cos^{m-4} a\,\text{sen}^4 a - \text{etc.}\end{aligned}\right\}[43];$$

$$\left.\begin{aligned}\text{sen}\,ma = m\cos^{m-1} a\,\text{sen}\,a - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos^{m-3} a\,\text{sen}^3 a \\ + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}\cos^{m-5} a\,\text{sen}^5 a - \text{etc.}\end{aligned}\right\}[44].$$

Debemos observar que no conteniendo la expresion de cos ma mas que potencias pares de sen a, podrá eliminarse esta cantidad por medio de la relacion ya conocida $\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$, y se tendrá así el valor de cos ma en funcion racional de cos a. Mas no podria eliminarse cos a de la fórmula [44] sin introducir en ella radicales, á no ser que m fuese un número impar. Si m es par, como la fórmula [43] contiene solamente potencias pares de cos a, puede ponerse en ella en vez de $\cos^2 a$ su valor $1 - \text{sen}^2 a$, y quedará entonces cos ma expresado en funcion racional de sen a.

(*) Es preciso no olvidar que $(\sqrt{-1})^{4n} = +1$, $(\sqrt{-1})^{4n+1} = +\sqrt{-1}$, $(\sqrt{-1})^{4n+2} = -1$ y que $(\sqrt{-1})^{4n+3} = -\sqrt{-1}$ (*Alg.*, **253**).

Sustituyendo en las ecuaciones [43] y [44] $\frac{a}{m}$ en vez de a, tendremos dos ecuaciones del grado m, con cuyo auxilio se podrá calcular cos $\frac{a}{m}$ y sen $\frac{a}{m}$. Si m es un número par, deduciremos de la primera los valores de sen $\frac{a}{m}$ y de cos $\frac{a}{m}$ en funcion de cos a. Conviene tener presente que podemos limitarnos al caso en que m sea impar; porque para hallar, por ejemplo, el seno del arco $\frac{a}{2n}$, se puede principiar por calcular el sen $\frac{a}{2}$ por medio de sen a (40), y buscar en seguida sen $\frac{a}{2n}$ en funcion de sen $\frac{a}{2}$ con el auxilio de la fórmula [44].

48. Agrupando las fórmulas [13] y [15], [14] y [16], tendremos

$$\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cos b \pm \operatorname{sen} b \cos a,$$
$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b;$$

y dividiendo estas dos ecuaciones miembro á miembro

$$\operatorname{tang}(a \pm b) = \frac{\operatorname{sen} a \cos b \pm \operatorname{sen} b \cos a}{\cos a \cos b \mp \operatorname{sen} b \operatorname{sen} a} \qquad [\alpha],$$

en la cual, dividiendo los dos términos del segundo miembro por $\cos a \cos b$, y teniendo presente la fórmula [8], hallaremos

$$\operatorname{tang}(a \pm b) = \frac{\operatorname{tang} a \pm \operatorname{tang} b}{1 \mp \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b} \qquad [45].$$

Así que *la tangente de la suma, ó de la diferencia, de dos arcos es igual al cociente que se obtiene dividiendo la suma, ó la diferencia, de las tangentes de estos arcos por la unidad disminuida, ó aumentada, en el producto de las tangentes.*

Como esta fórmula se ha obtenido dividiendo los dos términos del segundo miembro de la ecuacion [α] por $\cos a \cos b$, para no conservar duda alguna sobre su generalidad, es preciso hacer ver que es cierta aun cuando una de las cantidades $\cos a$ ó $\cos b$ sea cero, y aunque lo sean las dos.

Pero si $\cos a = 0$, será $\operatorname{tang} a = \infty$ y $a = (2k+1)\frac{\pi}{2}$; por consiguiente, dividiremos antes de todo, los dos términos del segundo

miembro de la ecuacion [45] por tang a, lo que nos dará

$$\text{tang}\,(a \pm b) = \frac{1 \pm \frac{\text{tang}\,b}{\text{tang}\,a}}{\frac{1}{\text{tang}\,a} \mp \text{tang}\,b},$$

y haciendo en esta $a=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, se reducirá á la identidad $\mp\frac{1}{\text{tang}\,b}=\frac{1}{\mp\text{tang}\,b}$; porque

$$\text{tang}\,(a \pm b) = \text{tang}\,(k\pi + \frac{\pi}{2} \pm b) = \mp\frac{1}{\text{tang}\,b}.$$

Finalmente, si á un mismo tiempo fueran $\cos a=0$ y $\cos b=0$ y por consiguiente $\text{tang}\,a=\infty$ y $\text{tang}\,b=\infty$, dividiriamos los dos términos del segundo miembro de la ecuacion [45] por $\text{tang}\,a \cdot \text{tang}\,b$, y suponiendo en seguida que $\text{tang}\,a$ y $\text{tang}\,b$ son iguales al infinito, se reducirá este segundo miembro á cero, y como el primero se reduce á $\text{tang}\left[(2k+1)\frac{\pi}{2} \pm (2k'+1)\frac{\pi}{2}\right] = \text{tang}\,n\pi = 0$, la ecuacion se verifica tambien en este caso.

49. Suponiendo $b=a$, la primera de las fórmulas [45] se reducirá á

$$\text{tang}\,2a = \frac{2\,\text{tang}\,a}{1-\text{tang}^2 a} \qquad [46],$$

que sirve para *calcular la tangente del doble de un arco en funcion de la del arco*.

50. Si se quiere *deducir la tangente de la mitad de un arco de la del arco*, se cambiará en la última fórmula a en $\frac{a}{2}$, y se sacará con facilidad de la ecuacion resultante, la siguiente :

$$\text{tang}\,a\,\text{tang}^2\frac{a}{2} + 2\,\text{tang}\,\frac{a}{2} - \text{tang}\,a = 0 \qquad [47],$$

por lo que la cuestion tiene dos soluciones si a no es conocido. Es fácil darse razon de esto, repitiendo aquí las consideraciones que ya otras veces hemos hecho ; y así reconoceremos, que siendo las raíces de la ecuacion [47] $\text{tang}\,\frac{a}{2}$ y $\text{tang}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{a}{2}\right)$, las secantes correspondientes á estas se cortan perpendicularmente. Además,

como $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{a}{2}\right)=-\cot\frac{a}{2}=-\frac{1}{\tan\frac{a}{2}}$, veremos que el producto de las dos raíces de la ecuacion [47] es -1.

51. Problema. *Calcular la tangente del tercio de un arco en funcion de la del arco.*

Hagamos $b=2a$ en la primera de las fórmulas [45], y en la que resulte, sustituyamos en vez de tang $2a$ el valor que para ella da la ecuacion [46], y despues de quitar los denominadores, tendremos

$$\tan 3a=\frac{3\tan a-\tan^3 a}{1-3\tan^2 a} \qquad [48].$$

Si queremos comprobar esta fórmula, será necesario dar á tang a un valor particular que nos lleve á otro de tang $3a$ que ya sea conocido de antemano; por consiguiente supondremos $a=45°$, lo que exige que tang $a=1$, y tang $3a=-1$. Sustituyendo estos valores en la ecuacion [48], se reducirá á $-1=\frac{3-1}{1-3}=-1$.

Cambiemos a en $\frac{a}{3}$, y, despues de quitar los denominadores y haber hecho la transposicion, hallaremos

$$\tan^3\frac{a}{3}-3\tan a\tan^2\frac{a}{3}-3\tan\frac{a}{3}+\tan a=0 \quad [49],$$

ecuacion que convendrá discutir (*), y cuya resolucion nos dará los tres valores que corresponden á tang $\frac{a}{3}$ cuando a no sea conocido. Así hallaremos que estas tres raíces son las tangentes de los arcos $\frac{a}{3}$, $\frac{\pi}{3}+\frac{a}{3}$, $\frac{2\pi}{3}+\frac{a}{3}$; y que si tang $a>0$, una es negativa y dos positivas, y de estas una menor y otra mayor que 1, al paso que si tang $a<0$, hay una raíz positiva y dos negativas, una de estas menor y otra mayor que 1.

Esta observacion nos servirá para distinguir cuál de las tres raíces de la ecuacion [49] será la tangente del arco $\frac{a}{3}$, en el caso

(*) Para reconocer algebráicamente que sus tres raíces son reales, no hay mas que sustituir *cero* y $+1$, si tang $a>0$, y *cero* y -1, si tang $a<0$.

de que no se conozca el número de grados de este arco. No habrá mas que seguir la marcha que hemos indicado en el n.° 41.

Si suponemos $a = 45°$, el arco $\frac{2\pi}{3} + \frac{a}{3}$ será igual á 135°, y su tangente será -1; luego ya podemos concluir de resolver la ecuacion [49].

52. Aplicaciones. I. *Calcular por logaritmos las cantidades:*

$$\frac{\operatorname{sen} a \pm \operatorname{sen} b}{\cos a \pm \cos b};\quad \frac{\operatorname{sen} a + \cos b}{\operatorname{sen} a - \cos b};\quad \operatorname{tang} a \pm \operatorname{tang} b;$$

$$\cot a \pm \cot b;\quad \frac{\operatorname{tang} a + \cot b}{\operatorname{tang} a - \cot b};\quad \sec a \pm \operatorname{cosec} b.$$

II. *Dado el coseno de un arco, calcular el de la cuarta parte de este arco.* —La discusion de la ecuacion de que depende el valor de $\cos\frac{a}{4}$ y la determinacion de este coseno, cuando es conocido a, son completamente análogas á las que hicimos en el n.° 40.

III. *Dada tang* a, *calcular tang* $\frac{a}{4}$! *—Discutir esta ecuacion algebráica y trigonométricamente. —Resolverla. —Determinar cuál de sus raices es la tangente de* $\frac{a}{4}$, *cuando el arco* a *sea conocido.* —Puede conocerse desde luego que la ecuacion se puede rebajar al segundo grado, pues para dividir un arco en cuatro partes iguales, se hacen dos bisecciones sucesivas, y cada una depende de una ecuacion de segundo grado (50).

IV. *Dada tang* a, *calcular sen* $\frac{a}{2}$. *—Discusion.*

V. *Dada la tangente de un arco, calcular el seno de los* $\frac{2}{3}$ *de este arco. —Discusion.*

VI. *Calcular tang* $\frac{2a}{3}$ *en funcion de cos* a. *—Discusion.*

VII. *¿De qué grado y de qué forma será la ecuacion que establezca una relacion entre sen* 2a *y cos* 3a*?*

CAPÍTULO III.

CONSTRUCCION DE TABLAS TRIGONOMÉTRICAS.

63. Una TABLA TRIGONOMÉTRICA es un cuadro dividido en cinco columnas: la primera de ellas contiene todos los arcos desde cero á 90° creciendo en progresion por diferencia, y en las otras cuatro estan los logaritmos de los senos, cosenos, tangentes y cotangentes de los mismos arcos. Las tablas de Callet, cuya construccion vamos á explicar, estan calculadas de 10″ en 10″, y contienen los logaritmos de las líneas trigonométricas aproximados hasta media diezmillonésima. Como el seno y el coseno de cualquier arco son siempre menores que el radio, sus logaritmos tendrian negativas las características si se hubiera tomado la unidad por radio de estos arcos, lo cual seria incómodo. Para evitar este inconveniente, se ha elegido para radio de las tablas á diez mil millones, esto es á 10^{10} (*). Pero como las líneas trigonométricas de arcos semejantes son proporcionales á los radios de los mismos arcos (27), si tuviesemos calculada una tabla de senos, cosenos, tangentes y cotangentes en la hipótesis de que el radio fuese la unidad lineal, no habria mas que añadir 10 unidades á las características de los logaritmos de estas líneas para tener los correspondientes en el supuesto de que el radio fuera igual á 10^{10}. Por lo tanto, vamos á calcular, tomando por radio la unidad lineal, los valores de los senos, cosenos, tangentes y cotangentes de todos los arcos, comprendidos en una progresion creciente aritmética, cuya razon es 10″, desde cero hasta 90° : buscaremos en seguida los logaritmos de los números que obtengamos de este modo, y añadiendo, por último, diez unidades á cada logaritmo, quedará construida la tabla.

Es claro que en vez de calcular todas las líneas trigonométricas, podemos reducir este cálculo solamente al del seno; porque, para

(*) Veremos efectivamente dentro de poco que el valor del seno de 10″ calculado bajo el supuesto de que el radio fuera igual á la unidad seria 0,00004 84813 681, y que por lo tanto la característica de su logaritmo seria —5.

tener el coseno de un arco, basta buscar el seno de su complemento, y luego será fácil hallar los valores de las tangentes y cotangentes por las relaciones que existen entre estas últimas líneas y las primeras (26). Mas, si de esta manera calculasemos los senos de $10''$ en $10''$ desde cero á 90°, tendriamos que ejecutar 32400 operaciones (porque el cuadrante tiene $324000''$, y el arco de $10''$ está por lo mismo contenido en él 32400 veces), de las cuales cada una dependeria de todas las precedentes, de manera que los errores cometidos en los senos de los arcos desde el de 45° hasta el de 90°, ó lo que es lo mismo en los cosenos de los arcos menores que 45°, podrian llegar á ser muy considerables. Por consiguiente, preferiremos determinar *separadamente* los senos y cosenos de todos los arcos de la progresion.

$$\div 0.10''.20''.30''.40''....45^\circ,$$

y nos hallaremos con que al mismo tiempo habremos calculado los cosenos y senos de los arcos comprendidos entre 45° y 90°, por cuanto el seno ó coseno de un arco mayor que 45° es igual al coseno ó seno de su complemento, que es menor que 45°.

Es evidente que lo primero que hay que hacer es calcular el seno y coseno de $10''$. Para conseguirlo de un modo elemental, principiaremos por establecer que *la unidad es el límite hácia el cual converge la razon entre el seno de un arco y el arco, á medida que se supone que este arco tiende hácia cero.* Efectivamente, consideremos un arco AM $=$ a (*Fig.* 10) *menor que un cuadrante*: bajemos desde el punto M la MM′ perpendicular al radio OA, tiremos en M la tangente MT, terminándola en la prolongacion de OA, y unamos M′ con T. La recta M′T será tangente á la circunferencia en el punto M′, y tendremos evidentemente

$$MM' < MAM' \text{ y } MAM' < MTM',$$

de donde dividiendo por 2 se saca

$$\operatorname{sen} a < a \quad \text{y} \quad a < \operatorname{tang} a;$$

es decir, que *todo arco menor que un cuadrante, es mayor que su seno y menor que su tangente.* De estas desigualdades sacaremos

$$\frac{\operatorname{sen} a}{a} < 1 \quad \text{y} \quad \frac{\operatorname{sen} a}{a} > \frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{tang} a} = \cos a.$$

Así es que la razon $\frac{\text{sen}\,a}{a}$ está comprendida entre la unidad y $\cos a$. Pero á proporcion que el arco a disminuye, la diferencia $(1-\cos a)$ disminuye tambien y tiende á hacerse cero, porque cuando un arco decrece hasta cero, su coseno crece hasta la unidad, luego, *a fortiori*, la razon $\frac{\text{sen}\,a}{a}$ tiende hácia la unidad. *Lo mismo sucede con la relacion* $\frac{\text{tang}\,a}{a}$.

Síguese de aquí forzosamente que siendo el arco de $10''$ muy pequeño, podremos, sin cometer error sensible, tomar su longitud por la de su seno; pero ¿cuál será la aproximacion con que tendremos así el valor de $\text{sen}\,10''$? Vamos á verlo. Sea a un arco menor que un cuadrante, y segun lo que precede, tendremos

$$\frac{\text{sen}\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}} > \cos\frac{a}{2},$$

de donde multiplicando los dos miembros por $2\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}$,

$$2\,\text{sen}\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} > a\cos^2\frac{a}{2} = a\left(1-\text{sen}^2\frac{a}{2}\right).$$

Pero $2\,\text{sen}\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}$ es igual á $\text{sen}\,a$; y $\left(1-\text{sen}^2\frac{a}{2}\right)$ es mayor que $\left(1-\frac{a^2}{4}\right)$, porque $\text{sen}\frac{a}{2} < \frac{a}{2}$; luego

$$\text{sen}\,a > a\left(1-\frac{a^2}{4}\right), \text{ y por lo tanto } a-\text{sen}\,a < \frac{a^3}{4},$$

que nos manifiesta que *la diferencia entre un arco menor que un cuadrante y su seno, es menor que la cuarta parte del cubo del arco.*

En el círculo cuyo radio sea la unidad lineal, la longitud del arco de $10''$ es igual á $\frac{\pi}{64800}$, cantidad menor que 5 cienmilésimas, ó que $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^4}$; luego la diferencia entre este arco y su seno será menor que $\frac{1}{32}\cdot\frac{1}{10^{12}}$, y, con mayor razon, menor que $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{10^{13}}$. Por esto, tomando la longitud del arco de $10''$ por valor del seno del mismo, el error no llegará á media unidad del décimotercio órden

decimal. Este valor es

$$\operatorname{sen} 10'' = 0{,}00004\ 84813\ 681.$$

Calculemos ya el $\cos 10''$, y para ello emplearemos la fórmula [22]

$$\cos a = 1 - 2\operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}.$$

Si en esta sustituimos $\frac{a}{2}$ en lugar de $\operatorname{sen}\frac{a}{2}$, resultará:

$$\cos a = 1 - 2\frac{a^2}{4},$$

y claro es que el error cometido sobre $\cos a$ será

$$2\left(\frac{a^2}{4} - \operatorname{sen}^2\frac{a}{2}\right) = 2\left(\frac{a}{2} + \operatorname{sen}\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2} - \operatorname{sen}\frac{a}{2}\right);$$

pero $\quad \frac{a}{2} + \operatorname{sen}\frac{a}{2} < a, \quad \frac{a}{2} - \operatorname{sen}\frac{a}{2} < \frac{1}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^3;$

luego $\frac{a^2}{4} - \operatorname{sen}^2\frac{a}{2} < \frac{a^4}{32}$; y por consecuencia, tomando $1 - \frac{a^2}{2}$ por valor de $\cos a$, cometeremos un error menor que $2\frac{a^4}{32} = \frac{a^4}{16}$; mas hemos hallado ya que a, que representa el arco de $10''$, es menor que $\frac{1}{2.10^4}$; luego $\frac{a^4}{16} < \frac{1}{256.10^{16}}$, cantidad que no llega á $\frac{1}{2}.\frac{1}{10^{18}}$. Por consiguiente, si calculamos $\cos 10''$ por medio de la fórmula $\cos a = 1 - \frac{a^2}{2}$, el error que cometeremos será menor que media unidad del décimooctavo órden decimal, y por lo tanto, podemos limitarnos á tomar las trece primeras cifras decimales, como hicimos para el seno, y hallaremos así que

$$\cos 10'' = 0{,}99999\ 99988\ 248.$$

Hallados estos valores, recordando que la suma de los senos de dos arcos es igual al doble del producto del seno de la semi-suma de los mismos arcos por el coseno de su semi-diferencia (34), y que la suma de los cosenos de dos arcos es igual al doble del producto del coseno de la semi-suma por el coseno de la semi-diferencia de los mismos (35), y designando por a un término cual-

quiera de la progresion

$$\div 0.10''.20''.30''.40''....45^\circ,$$

tendremos

$$\operatorname{sen}(a+10'')+\operatorname{sen}(a-10'')=2\operatorname{sen}a\cos 10'',$$
$$\cos(a+10'')+\cos(a-10'')=2\cos a\cos 10'',$$

de cuyas ecuaciones se saca

$$\operatorname{sen}(a+10'')=2\cos 10''.\operatorname{sen}a-\operatorname{sen}(a-10'') \qquad [p],$$
$$\cos(a+10'')=2\cos 10''.\cos a-\cos(a-10'') \qquad [q].$$

Pero $a-10''$, a y $a+10''$ son tres términos consecutivos de la referida progresion; luego *para calcular el seno de uno cualquiera de los términos de esta progresion, se multiplicará el doble del coseno de la razon por el seno del arco precedente y se restará del producto el seno del arco ante-precedente*. Ya conociamos el seno y el coseno de los arcos de 0° y $10''$, luego podremos calcular por esta regla el seno de $20''$, despues por medio de este y el de $10''$ podremos calcular el de $30''$, luego los de $40''$.... $50''$.... y subir así de $10''$ en $10''$ hasta el seno de 45°. Los cosenos de los mismos arcos se calcularian de una manera análoga.

El valor que hemos hallado antes para $\cos 10''$ se diferencia muy poco de la unidad, y esta consideracion ha dado un medio para simplificar considerablemente los cálculos que preceden. Con efecto, designemos por k el doble de la diferencia entre 1 y $\cos 10''$, es decir, supongamos que

$$k=2(1-\cos 10'')=0,00000\ 00023\ 504;$$

de aquí resultará que $2\cos 10''=2-k$, y sustituyendo esta expresion en las fórmulas [p] y [q], se podrán escribir los valores de $\operatorname{sen}(a+10'')$ y de $\cos(a+10'')$ como sigue:

$$\operatorname{sen}(a+10'')=\operatorname{sen}a+[\operatorname{sen}a-\operatorname{sen}(a-10'')]-k\operatorname{sen}a,$$
$$\cos(a+10'')=\cos a+[\cos a-\cos(a-10'')]-k\cos a.$$

Así que *para calcular el seno de uno cualquiera de los arcos de la progresion propuesta, se añadirá al seno del arco que preceda el esceso de este seno sobre el del ante-precedente, y de esta suma se restará el producto del número constante* **k**, *por el seno del arco que precede*. El coseno se calculará de un modo análogo.

Vemos, pues, que la aplicacion de esta regla no presenta mas

operacion que pueda parecer trabajosa, que la multiplicacion de k por sen a ó por cos a; pero tambien puede reducirse esta multiplicacion á una simple suma, formando anticipadamente los nueve primeros múltiplos de este número constante k. Por otra parte, la multiplicacion de k por sen a se reducirá en los casos mas complicados á la suma de cinco productos parciales, de los que el primero tendrá 5 cifras significativas, y cada uno de los siguientes una menos que el que le preceda. Supongamos, por ejemplo, que sea sen $a = 0{,}73496\ 88987\ 654$. Para multiplicar este número por k tendremos que sumar los múltiplos 7.°, 3.°, 4.°, 9.°, 6.°, 8.°... de k; pero habiendo corrido en ellos la coma 1, 2, 3, 4, 5, 6.. lugares hácia la izquierda, porque las cifras 7, 3, 4, 9, 6, 8... representan respectivamente unidades decimales de 1.°, 2.°, 3.°, 4.°, 5.°, 6.°... órden. Pero como cada uno de estos múltiplos de k se compone de trece cifras decimales, y de estas son ceros lo menos las siete primeras, vemos que el producto de k por 0,7, no contendrá mas que cinco cifras significativas, si hemos dejado solamente en este producto trece decimales, como debe hacerse. Del mismo modo nos convenceremos de que el producto de k por 0,03 no puede contener mas de 4 cifras significativas, etc.: de modo que la multiplicacion de k por sen a se efectuará con mucha rapidez.

Cuando hay que ejecutar tantos cálculos, se deben comprobar los resultados con la mayor frecuencia posible, y estas comprobaciones son además útiles para saber con qué grado de exactitud puede contarse. Por lo tanto indicaremos el modo de calcular *directamente* los senos y cosenos de los arcos comprendidos en la progresion

$$\div 0.9^{\circ}.18^{\circ}.27^{\circ}.36^{\circ}.45^{\circ}.$$

Anteriormente hemos visto que sen $45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Tambien es fácil hallar el sen 18°, porque es la mitad de la cuerda que subtiende al arco de 36°, esto es, á la décima parte de la circunferencia; y como el lado del decágono regular es igual á $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, tendremos que sen $18^{\circ} = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$, y de aquí deduciremos que cos $18^{\circ} = \sqrt{1-\text{sen}^2 18^{\circ}} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

Sustituyendo estos valores de sen 18° y de cos 18° en las fórmulas [17] y [18], hallarémos los de sen 36° y cos 36°, y tambien será fácil calcular el seno y coseno de 9° con auxilio de las [36]. Estas mismas fórmulas [36] nos llevarán á conocer los valores del seno y coseno de 27°, porque el seno de 54° ya está conocido una vez que este arco es complemento de 36°. De este modo formaremos el cuadro siguiente:

$$\operatorname{sen} 9^\circ = \frac{1}{4}\left(\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{5-\sqrt{5}}\right); \quad \cos 9^\circ = \frac{1}{4}\left(\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{5-\sqrt{5}}\right).$$

$$\operatorname{sen} 18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1); \quad \cos 18^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

$$\operatorname{sen} 27^\circ = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}\right); \quad \cos 27^\circ = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}}\right).$$

$$\operatorname{sen} 36^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}; \quad \cos 36^\circ = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5}).$$

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Es fácil calcular estas fórmulas con el grado de aproximacion que se quiera, y comparando sus resultados con los obtenidos calculando de 10″ en 10″, veremos cuáles son las cifras decimales comunes á los valores hallados por los dos métodos para el seno ó para el coseno de un mismo arco, y sabremos de este modo con qué grado de aproximacion se puede contar en los valores de los arcos intermedios. Suprimirémos las decimales inexactas, buscarémos los logaritmos de los números expresados por los que hayamos conservado, y quedará construida la tabla de los logaritmos de los senos y cosenos. Fácilmente se deduce de esta la de los logaritmos de las tangentes y cotangentes, y no faltará mas que añadir 10 unidades á cada logaritmo de los que hayamos encontrado para tener ya las *tablas trigonométricas* usuales.

CAPÍTULO IV.

FÓRMULAS PARA LA RESOLUCION DE TRIÁNGULOS RECTILÍNEOS.

54. Vamos á formar las ecuaciones en que se consignen las relaciones que existen entre los lados y los ángulos de un triángulo; pero antes recordaremos que si desde el vértice A (*fig.* 3) de un ángulo cualquiera se describen los arcos MB, M'B', M''B'',... que terminen en los lados de aquel, los senos de todos estos arcos serán proporcionales á sus radios, de modo que se tendrá $\frac{MP}{AM}=\frac{M'P'}{AM'}=\frac{M''P''}{AM''}=$etc. Así que cuando esté dado el ángulo A, quedará determinada la razon del seno de cualquiera de estos arcos al radio, y recíprocamente (*); por consiguiente esta razon basta para determinar el ángulo A. La referida razon es lo que se llama el seno del ángulo A; por consiguiente *llamaremos* SENO DE UN ÁNGULO *á la razon geométrica del seno de uno cualquiera de los arcos comprendidos entre sus lados, descritos desde el vértice como centro, al radio del arco.* Como el radio es arbitrario, convendremos para mayor sencillez en suponer que es igual á la unidad lineal; y en este concepto *el seno de un ángulo será el número abstracto que exprese la longitud del seno del arco que esté comprendido entre sus lados y se haya descrito haciendo centro en el vértice, con un radio igual á la unidad lineal.* Las consideraciones que nos han traido á esta definicion se estienden á las de las otras líneas trigonométricas, por lo cual vemos que los símbolos sen A, cos A, tang A, cot A, etc., que entrarán en las fórmulas, no representarán mas que números abstractos.

55. TEOREMA. *En todo triángulo el doble del producto del coseno de un ángulo por los dos lados que le comprenden es igual á la suma de los cuadrados de estos dos lados disminuida en el cuadrado del tercero.*

(*) Sin embargo, haremos observar que teniendo un mismo seno los arcos suplementarios, cuando se conozca la razon del seno de un arco interceptado por los lados de un ángulo al radio del arco, no estará completamente determinado el ángulo, puesto que hay dos que tienen la misma razon. Es necesario saber además si el ángulo de que se trata es agudo ú obtuso.

Sea ABC (*fig.* 11) el triángulo propuesto, cuyos ángulos designarémos con las letras A, B, C puestas en sus vértices, y á los lados opuestos con las a, b, c respectivamente. Con este convenio, bajemos desde el vértice C la perpendicular CI al lado opuesto AB, y en virtud de un teorema muy conocido de geometría, tendremos

$$a^2=b^2+c^2-2c\,.\,\mathrm{AI}.$$

Pero si desde A como centro se describe con un radio igual á la unidad lineal el arco DE comprendido entre los lados del ángulo CAI, y se baja la perpendicular DF al lado AI, esta DF será el seno del ángulo CAI y por consiguiente del A (54), al paso que AF será coseno del mismo. Mas los triángulos ACI y ADF son semejantes: luego

$$\mathrm{AD}:\mathrm{AC}::\mathrm{AF}:\mathrm{AI},$$

ó sea
$$1:b::\cos \mathrm{A}:\mathrm{AI}=b\cos \mathrm{A}.$$

Este valor de AI, puesto en la expresion del de a^2, le transforma en

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos \mathrm{A}.$$

Aunque hemos deducido esta fórmula suponiendo que el ángulo A era agudo, es tambien cierta aun cuando sea obtuso, pues en vez de tener que

$$a^2=b^2+c^2-2c\,.\,\mathrm{AI},$$

hubiesemos tenido en este caso que

$$a^2=b^2+c^2+2c\,.\,\mathrm{AI};$$

pero tambien en esta hipótesis por ser CAI suplemento del ángulo BAC seria su coseno AF igual á $-\cos \mathrm{A}$, y por lo tanto se verificaria que

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos \mathrm{A}.$$

Por último tambien se verifica esta ecuacion cuando A sea recto, pues segun el teorema de Pitágoras, es en este caso.

$$a^2=b^2+c^2.$$

Transponiendo los términos a^2 y $-2bc\cos \mathrm{A}$, resultará

$$2bc\cos \mathrm{A}=b^2+c^2-a^2,$$

que es la traduccion algebráica del teorema.

56. Aplicando este teorema sucesivamente á los tres ángulos

A. B. C de un triángulo ABC, tendremos las tres siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 2bc\cos A &= b^2+c^2-a^2, \\ 2ac\cos B &= a^2+c^2-b^2, \\ 2ab\cos C &= a^2+b^2-c^2, \end{aligned}\right\} \qquad [50]$$

que dan la solucion completa del problema general que se propone la trigonometría, porque encierran los seis elementos de todo triángulo, y por lo tanto, cuando se conozcan tres de estas cantidades podremos deducir de ellas las otras tres. Sin embargo, si se quisieran calcular los tres lados en funcion de los tres ángulos, hallariamos valores indeterminados para las incógnitas *a*, *b*, *c*, porque todos los triángulos equiángulos tienen proporcionales los lados homólogos.

Queda, pues, reducido el problema de la resolucion de los triángulos á una simple cuestion de álgebra, que es la de las ecuaciones [50]. Cada una de las fórmulas que haya de dar los valores de las incógnitas, contendrá una incógnita y tres datos, es decir, cuatro elementos del triángulo, y como con seis elementos no se pueden formar mas que las cuatro combinaciones siguientes :

Un lado y los tres ángulos ;

Dos lados y los ángulos opuestos ;

Dos lados, el ángulo comprendido y el ángulo opuesto á uno de ellos ;

Los tres lados y un ángulo,

no hay necesidad de obtener mas que cuatro clases de fórmulas. Pero una ecuacion no puede contener un lado y los tres ángulos; pues de lo contrario se podria resolver un triángulo en que solo se conociesen sus ángulos; por otra parte el teorema fundamental da ya una relacion entre los tres lados y un ángulo : luego solamente nos falta buscar fórmulas de la segunda y tercera clase. Esto es lo que vamos á hacer, principiando por los casos de los triángulos rectángulos.

Como en estos el ángulo recto es siempre un dato del problema, y los dos agudos son complementarios, el seno ó la tangente del uno podrá reemplazarse por el coseno ó la cotangente del otro, y *vice-versa*, y solo será preciso hallar dos ecuaciones que contengan respectivamente :

La hipotenusa, un cateto y un ángulo ;

Los dos catetos y un ángulo.

57. Supongamos que el ángulo A (*Fig.* 12) sea recto, cuya condicion quedará expresada poniendo en la segunda de las ecuaciones [50] b^2+c^2 en vez de a^2, con lo que hallaremos, despues de todas las reducciones

$$c=a\cos B,$$

que manifiesta que *en todo triángulo rectángulo cada cateto es el producto de la hipótenusa por el coseno del ángulo adyacente ó por el seno del ángulo opuesto;* porque $\cos B=\operatorname{sen} C$.

58. De aquí se deduce que *la proyeccion de una recta sobre otra es igual al producto de la primera multiplicada por el coseno del* ÁNGULO *agudo que forman las dos.* Efectivamente, supongamos que por los extremos de la recta AB (*Fig.* 13) se han hecho pasar dos planos perpendiculares á la indefinida UV, y la parte A′B′ de esta última comprendida entre ellos será la proyeccion de AB. Mas si por el punto A tiramos la AC paralela á UV, terminándola en C, que es el encuentro con el plano que pasa por B, se tendrá AC igual á A′B′, y el ángulo BAC que forma con AB es el que se ha convenido en llamar ángulo α de AB con UV. Pero el triángulo rectángulo ABC da que $AC=AB.\cos BAC$ ó sea $A'B'=AB.\cos\alpha$, luego queda demostrada la proposicion.

59. Por el teorema del n.° 57 tenemos las dos ecuaciones

$$c=a\cos B,\quad b=a\operatorname{sen} B,$$

que si las dividimos miembro á miembro y recordamos la fórmula [8], hallaremos

$$b=c\operatorname{tang} B;$$

es decir (*Fig.* 12), que *en todo triángulo rectángulo un cateto cualquiera es igual á la tangente del ángulo opuesto, multiplicada por el otro cateto.*

60. Si queremos demostrar sintéticamente los dos teoremas que acabamos de establecer, relativos á los triángulos rectángulos, describiremos desde B como centro y con un radio igual á la unidad lineal un arco de círculo DE, terminado en los lados del ángulo ABC, y tirando despues por los puntos D y E, las DF y EG perpendiculares, al lado AB, formaremos los triángulos BDF y BGE, semejantes al ABC, y comparando sus lados homólogos, hallaremos

$$BD:BC::DF:AC::BF:AB,\quad y\quad BE:BA::EG:AC,$$

ó sea

$$1 : a :: \text{sen}\,B : b :: \cos B : c, \quad \text{y} \quad 1 : c :: \text{tang}\,B : b,$$

de cuyas relaciones se saca que

$$b = a\,\text{sen}\,B, \quad c = a\cos B, \quad b = c\,\text{tang}\,B,$$

fórmulas que son la traduccíon algebráica de los teoremas enunciados en los n.os **57** y **59**.

61. Ocupémonos ya de los triángulos oblicuángulos. Hay que *hallar* primeramente *una relacion entre los dos ángulos* A *y* B, por ejemplo, *y los lados opuestos* a *y* b (**56**).

Las dos primeras ecuaciones [50] contienen además de estas cuatro cantidades el lado c; luego si eliminamos este último, tendrémos la relacion que se busca. Para esto, y siguiendo las reglas de la eliminacion entre dos ecuaciones de segundo grado con dos incógnitas (*Alg.*, **224**), será preciso eliminar primeramente c^2 entre las ecuaciones

$$2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2 \quad \text{y} \quad 2ac\cos B = a^2 + c^2 - b^2,$$

lo que conseguiremos restándolas miembro á miembro. Así hallarémos despues de todas las reducciones

$$c(a\cos B - b\cos A) = a^2 - b^2.$$

De esta ecuacion deberiamos sacar el valor de c para sustituirle en una de las propuestas; pero es mas fácil deducir de estas mismas una nueva en que c entre nada mas que con su primera potencia, y basta para esto sumarlas, lo cual despues de dividir por $2c$, dará

$$a\cos B + b\cos A = c.$$

Multiplicando ordenadamente esta ecuacion y la que precede, podremos suprimir el factor c que resulta comun en los dos miembros del producto, y hallaremos

$$a^2\cos^2 B - b^2\cos^2 A = a^2 - b^2,$$

cuya ecuacion es la relacion que buscábamos, pues no contiene ya mas que los dos ángulos A y B, y los lados a y b, opuestos á aquellos. Pero aun se la puede presentar bajo una forma mas sencilla, porque trasponiendo los términos $a^2\cos^2 B$ y $-b^2$, y teniendo en cuenta la fórmula [7], resultará

$$b\,\text{sen}\,A = a\,\text{sen}\,B, \quad \text{de donde} \quad \text{sen}\,A : \text{sen}\,B :: a : b,$$

que quiere decir que *en todo triángulo rectilíneo los senos de los ángulos son proporcionales á los lados opuestos á estos ángulos.*

Se puede demostrar este elegante teorema de un modo sintético que fundándose únicamente en las definiciones, nos proporciona el que podamos considerarle como el teorema fundamental de la trigonometría rectilínea (*). Sea ABC (*Fig.* 14) el triángulo propuesto: circunscribámosle una circunferencia, y desde el centro O con un radio igual á la unidad lineal, describamos otra circunferencia que cortará á las rectas OA, OB y OC en los puntos A′, B′, C′, que determinarán un nuevo triángulo A′B′C′, evidentemente semejante al ABC, y quedará

$$AB : A'B' :: AC : A'C' :: BC : B'C'.$$

Pero el ángulo A, por ser igual al A′, tiene por medida la mitad del arco B′C′, y por consiguiente su seno será la mitad de la cuerda B′C′ de este arco (54 y 6). Por una razon semejante

$$\text{sen}\,B = \frac{1}{2}A'C' \quad \text{y} \quad \text{sen}\,C = \frac{1}{2}A'B'.$$

(*) Para que pudiéramos considerar que el teorema que acabamos de enunciar era el fundamental, seria preciso deducir de él el del n.° 55; pero esto es fácil. Con efecto, el teorema de la proporcionalidad de los senos de los ángulos con los lados opuestos, da las siguientes ecuaciones:

$$a\,\text{sen}\,B = b\,\text{sen}\,A, \quad a\,\text{sen}\,C = c\,\text{sen}\,A:$$

tenemos además

$$A + B + C = 180°;$$

con que eliminando C entre estas dos, hallaremos [18],

$$c\,\text{sen}\,A = a\,\text{sen}\,(A + B);$$

pero tambien sabemos (29) que

$$\text{sen}\,(A + B) = \text{sen}\,A\cos B + \cos A\,\text{sen}\,B;$$

luego

$$c\,\text{sen}\,A = b\,\text{sen}\,A\cos B + a\,\text{sen}\,B\cos A.$$

Sustituyamos en esta $b\,\text{sen}\,A$ en vez de $a\,\text{sen}\,B$, y dividiendo por sen A los dos miembros de la ecuacion resultante, lo cual puede hacerse, pues el ángulo A no puede ser cero ni 180°, tendremos

$$c = a\cos B + b\cos A.$$

Pero de la primera ecuacion se saca $\text{sen}\,B - \frac{b\,\text{sen}\,A}{a}$, y como $\cos B = \sqrt{1 - \text{sen}^2 B}$ resultará $\cos B\sqrt{1 - \frac{b^2\text{sen}^2 A}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 b^2 \text{sen}^2 A}{a}}$; luego

$$c = \sqrt{a^2 - b^2\text{sen}^2 A} + b\cos A;$$

y, finalmente, haciendo desaparecer el radical sacaremos de esta

$$2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2.$$

Dividiendo por 2 los consecuentes de la série de razones iguales arriba escrita, hallaremos

$$c : \operatorname{sen} C :: b : \operatorname{sen} B :: a : \operatorname{sen} A,$$

la cual demuestra el teorema.

62. Pasemos ya á *buscar una relacion entre dos lados de un triángulo, el ángulo comprendido, y el opuesto á uno de ellos;* por ejemplo, entre a, b, C y A.

Para esto, como $\operatorname{sen} B = \operatorname{sen}(A+C)$ se trasforma la ecuacion $a \operatorname{sen} B = b \operatorname{sen} A$ en la

$$a \operatorname{sen}(A+C) = b \operatorname{sen} A \qquad [51],$$

que es la relacion que se pide.

Si fuese la incógnita alguna de las tres cantidades a, b, ó C, seria fácil sacar de esta ecuacion su valor. Ahora vamos á ver lo que hariamos cuando la incógnita fuera el ángulo A.

La ecuacion [51] se puede escribir así

$$\frac{b}{a} = \frac{\operatorname{sen}(A+C)}{\operatorname{sen} A},$$

y de esta sacaremos, en virtud de un principio muy sabido de aritmética

$$\frac{b+a}{b-a} = \frac{\operatorname{sen}(A+C) + \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen}(A+C) - \operatorname{sen} A},$$

y en virtud del teorema del n.° 37

$$\frac{b+a}{b-a} = \frac{\operatorname{tang}\left(A+\frac{C}{2}\right)}{\operatorname{tang}\frac{C}{2}},$$

fórmula que sirve para calcular fácilmente el valor del ángulo A.

Puede dársele otra forma observando que $\frac{C}{2}$ es el complemento de $\frac{A+B}{2}$ y que $\frac{B-A}{2}$ lo es de $\left(A+\frac{C}{2}\right)$, pues de esto resulta que $\operatorname{tang}\frac{C}{2} = \cot\frac{B+A}{2} = \frac{1}{\operatorname{tang}\frac{B+A}{2}}$ y que $\operatorname{tang}\left(A+\frac{C}{2}\right) = \cot\frac{B-A}{2}$

$=\frac{1}{\tang\frac{B-A}{2}}$; cuyos valores, sustituidos en ella, darán

$$\frac{b+a}{b-a}=\frac{\tang\frac{1}{2}(B+A)}{\tang\frac{1}{2}(B-A)} \qquad [52].$$

Esta manifiesta que *en todo triángulo la suma de dos lados es á su diferencia, como la tangente de la semi-suma de los ángulos opuestos á estos lados, es á la tangente de su semi-diferencia.*

Puede demostrarse directamente este teorema partiendo de la fórmula

$$\frac{b}{a}=\frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A},$$

pues de aquí se saca (37)

$$\frac{b+a}{b-a}=\frac{\operatorname{sen} B+\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B-\operatorname{sen} A}=\frac{\tang\frac{1}{2}(B+A)}{\tang\frac{1}{2}(B-A)}.$$

Como suponemos que a, b, C son datos del problema, conocemos tres términos de la fórmula [52], porque además sabemos que $\frac{A+B}{2}=90^0-\frac{C}{2}$; luego podemos llegar á conocer en ella $\frac{A-B}{2}$ y en seguida A y B. Por lo tanto, la fórmula [52] puede reemplazar muy bien á la [51].

Con auxilio de este teorema y de los que dejamos demostrados en los n.os 55 y 61, podemos resolver cualquier triángulo rectilíneo, con tal de que entre los datos haya por lo menos un lado.

63. Vamos á *probar* ANALÍTICAMENTE *que no basta el conocimiento de los tres ángulos de un triángulo para determinar los lados.*

Antes de demostrar este principio haremos ver que á un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas,

$$A=0,\quad B=0,\quad C=0 \qquad [\alpha],$$

se puede reemplazar el de las tres

$$A+B=0,\quad A+C=0,\quad B+C=0 \qquad [\beta],$$

que se forma sumando aquellas de dos en dos. Desde luego es evidente que todo sistema de valores de las incógnitas que satisfaga á

las ecuaciones [α], verifica tambien las [β]. Además, todos los que verifican á las ecuaciones [β], verifican tambien á la que resulta de restar la tercera de la suma de las dos primeras, es decir, á la $(A+B)+(A+C)-(B+C)=0$, ó sea $A=0$; por una razon análoga, satisfarán tambien á las $B=0$ y $C=0$: luego el sistema de ecuaciones [β] es equivalente al de las [α].

Segun esto, combinemos las ecuaciones [50] dos á dos por via de suma, y suprimiendo los factores c, b, a, comunes á los dos miembros, lo cual puede hacerse porque estas cantidades no pueden ser cero, resultará

$$\left.\begin{array}{r} a\cos B + b\cos A = c \\ a\cos C + c\cos A = b \\ b\cos C + c\cos B = a \end{array}\right\} \qquad [\gamma]$$

de modo que en lugar de tres ecuaciones de segundo grado, no tenemos ya mas que resolver tres de primero. Eliminemos c entre las dos primeras, y hallaremos

$$a(\cos A\cos B + \cos C) + b\cos^2 A = b,$$

ó sea
$$\cos A\cos B + \cos C = \frac{b}{a}\operatorname{sen}^2 A \qquad [\delta].$$

Para eliminar c entre la primera y la tercera de las ecuaciones [γ], observaremos que la primera no cambia aun cuando se permuten en ella a y b, y A y B, al paso que si hacemos esta misma permutacion en la segunda, se convierte en la tercera: luego si lo hacemos en la [δ], tendremos precisamente la ecuacion final que dará la eliminacion de c entre la primera y tercera de las [γ], cuya ecuacion final es

$$\cos B\cos A + \cos C = \frac{a}{b}\operatorname{sen}^2 B \qquad [\varepsilon].$$

Pero en virtud del n.° 61, tenemos que

$a\operatorname{sen} B = b\operatorname{sen} A$, de donde se saca $a^2\operatorname{sen}^2 B = b^2\operatorname{sen}^2 A$,

y dividiendo por ab los dos miembros de esta última

$$\frac{a}{b}\operatorname{sen}^2 B = \frac{b}{a}\operatorname{sen}^2 A.$$

Luego las ecuaciones [δ] y [ε] son idénticas, y por lo tanto no hay mas que una ecuacion entre las dos incógnitas a y b, quedando es-

tas por consiguiente *indeterminadas*. Sin embargo, su razon $\frac{a}{b}$, es determinada, pues tiene por valor $\frac{\cos A \cos B + \cos C}{\operatorname{sen}^2 A}$.

Hubieramos podido convencernos de que las ecuaciones [γ] son indeterminadas, observando que no hay en ellas ningun término enteramente conocido, y demostrando que el denominador comun de los valores de las incógnitas a, b, c, es igual á cero (*Alg.*, **152**). En efecto, formando este denominador segun la regla de KRAMER (*Algebra*, **140**), hallaremos

$$-\cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C - 2 \cos A \cos B \cos C + 1 ;$$

cantidad que se reduce á *cero* sustituyendo en ella en vez de cos C su igual

$$-\cos(A+B) = -\cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B.$$

64. En las tablas trigonométricas no se hallan los valores de los *senos*, *cosenos*, etc., de los arcos menores que 90°, sino los de sus logaritmos; por lo cual hay que preparar las fórmulas que hemos obtenido para la resolucion de los triángulos, de modo que pueda aplicárseles el cálculo logarítmico, y que no haya necesidad de pasar de los números á los logaritmos, ni volver de los logaritmos á los números sino muy pocas veces. Se consigue esto valiéndose de cantidades auxiliares y transformando las expresiones de los valores de las incógnitas en productos ó cocientes formados por potencias de cualquier grado de aquellas cantidades, cuando ya las expresiones dadas no tuviesen aquella forma y las tablas darán inmediatamente á conocer los logaritmos.

Se puede siempre calcular por logaritmos la suma ó diferencia de dos cantidades, y por consiguiente de tantas cantidades como se quiera.

1.° Consideremos primeramente un binomio $(a+b)$ cuyos dos términos sean positivos. Saquemos a por factor comun y tendremos $a+b=a\left(1+\frac{b}{a}\right)$. Pero ya hemos visto que si un arco crece de una manera contínua desde *cero* hasta 90°, su tangente crece tambien de un modo contínuo desde *cero* hasta el *infinito*: así es que cualquier valor *positivo* que tenga $\frac{b}{a}$, siempre podremos hallar en el primer cuadrante un arco φ que tenga por tangente $\sqrt{\frac{b}{a}}$

Supongamos, pues, que

$$\tang \varphi = \sqrt{\frac{b}{a}},$$

y resultará

$$a + b = a(1 + \tang^2 \varphi) = a\left(1 + \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}\right) = \frac{a}{\cos^2 \varphi}.$$

Así por medio de una tabla de senos se podrá determinar primeramente el ángulo φ, despues su coseno, y calcular luego la suma $(a + b)$ por logaritmos.

2.° Sea ahora $(a - b)$ un binomio cuyo segundo término es negativo, y supongamos además que $a > b$. Sacaremos tambien á a por factor comun, y tendremos $a - b = a\left(1 - \frac{b}{a}\right)$. Como $\frac{b}{a}$ es positivo y menor que la unidad, podemos hallar en el primer cuadrante un arco φ cuyo seno sea igual á la raíz cuadrada de $\frac{b}{a}$: así supondremos

$$\operatorname{sen} \varphi = \sqrt{\frac{b}{a}},$$

y resultará

$$a - b = a(1 - \operatorname{sen}^2 \varphi) = a \cos^2 \varphi,$$

en cuya expresion se puede calcular $(a - b)$ por logaritmos.

Como el radio de las tablas no es la unidad lineal, reemplazaremos en las fórmulas precedentes cada línea trigonométrica por su razon al radio que llamaremos R (27), y tomando los logaritmos de los dos miembros, hallaremos

1.° $$\log \tang \varphi = \log R + \frac{\log b - \log a}{2};$$

$$\log (a + b) = \log a + 2 \log R - 2 \log \cos \varphi.$$

2.° $$\log \operatorname{sen} \varphi = \log R + \frac{\log b - \log a}{2};$$

$$\log (a - b) = \log a + 2 \log \cos \varphi - 2 \log R.$$

65. Supongamos finalmente que uno de los términos del binomio que queremos transformar en monomio, contenga el seno y el otro término, el coseno de cierto arco; sirva de ejemplo el binomio

$$A \operatorname{sen} \alpha + B \cos \alpha.$$

Sacaremos primeramente por factor comun al coeficiente de sen α ó al de cos α, y tendremos

$$A \operatorname{sen}\alpha + B\cos\alpha = A\left(\operatorname{sen}\alpha + \frac{B}{A}\cos\alpha\right),$$

y si suponemos que $\frac{B}{A} = \operatorname{tang}\varphi$, resultará

$$A \operatorname{sen}\alpha + B\cos\alpha = A(\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{tang}\varphi\cos\alpha) = \frac{A(\operatorname{sen}\alpha\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi\cos\alpha)}{\cos\varphi} = \frac{A\operatorname{sen}(\alpha+\varphi)}{\cos\varphi},$$

y restableciendo el radio R, se podrá calcular por logaritmos el binomio propuesto por medio de las dos ecuaciones

$$\log\operatorname{tang}\varphi = \log R + \log B - \log A,$$
$$\log(A\operatorname{sen}\alpha + B\cos\alpha) = \log A + \log\operatorname{sen}(\alpha+\varphi) - \log\cos\varphi.$$

CAPÍTULO V.

RESOLUCION DE LOS TRIÁNGULOS RECTILÍNEOS.

§ I.—Triángulos rectángulos.

66. 1.er Caso. *Resolver un triángulo rectángulo cuando se conoce su hipotenusa* a *y un ángulo agudo* B (*Fig.* 12).

Las incógnitas del problema son el ángulo C y los dos catetos b y c.

Como al establecer las fórmulas que han de servir para la resolucion de los triángulos, supusimos que el radio de las tablas trigonométricas era la unidad, y en las que hemos de usar no es cierta esta hipótesis, antes de emplear aquellas fórmulas será preciso poner en ellas, en vez de cada línea trigonométrica, la razon entre esta línea y el radio (27), al que llamaremos R. En lo sucesivo supondremos hecha ya esta sustitucion. Además, es necesario preparar las fórmulas de modo que se les pueda aplicar el cálculo logarítmico (64).

Bajo este supuesto, volvamos á la cuestion que se quiere resolver. Desde luego tendremos el valor del ángulo desconocido C, tomando el complemento del B. Despues determinaremos los dos catetos b y c, valiéndonos de la fórmula que encierra la hipotenusa, un cateto y un ángulo (57), la que dará

$$b=a\frac{\operatorname{sen} B}{R}, \quad y \quad c=a\frac{\cos B}{R},$$

de donde sale

$$\log b=\log a+\log \operatorname{sen} B-\log R,$$

y

$$\log c=\log a+\log \cos B-\log R,$$

y será ya fácil obtener así los valores de b y c. Para comprobarlos, podemos calcular nuevamente el cateto c por el teorema de Pitágoras, en la fórmula

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{(a+b)(a-b)},$$

de la cual

$$\log c=\frac{\log(a+b)+\log(a-b)}{2}.$$

67. 2.° Caso. *Conociendo la hipotenusa* a *y un cateto* b, *calcular el otro cateto* c *y los dos ángulos agudos* B *y* C.

Calcularemos el cateto c por el teorema de Pitágoras, en la fórmula

$$\log c = \frac{\log(a+b)+\log(a-b)}{2},$$

y para hallar el ángulo B, por ejemplo, nos valdremos de la relacion que existe entre la hipotenusa, un cateto y un ángulo agudo (57), que dará

$$b = a\frac{\text{sen}\,B}{R} \quad \text{de donde} \quad \log \text{sen}\,B = \log b + \log R - \log a.$$

Buscarémos en las tablas el valor que resulte para $\log \text{sen}\,B$, y al lado hallaremos escrito el del ángulo B. Restando este de 90°, tendremos el C.

Si queremos comprobar los valores así encontrados, podemos calcular el ángulo C en funcion de c por la fórmula

$$c = a\frac{\text{sen}\,C}{R} \quad \text{de la cual} \quad \log \text{sen}\,C = \log c + \log R - \log a,$$

y si el nuevo valor de C concuerda con el primero, estaremos seguros de que no solamente el primer valor de C es exacto, sino de que tambien lo es el de c.

68. 3.er Caso. *Resolver un triángulo rectángulo conociendo uno de sus catetos* b, *y un ángulo agudo* B.

Se quiere hallar el ángulo C, la hipotenusa a y el cateto c. El ángulo C es conocido inmediatamente tomando el complemento de B Para obtener la hipotenusa a haremos uso de la relacion que existe entre esta línea, un cateto y un ángulo (57); y para hallar el cateto c de la que liga á los dos catetos con un ángulo agudo (59): así

$$b = a\frac{\text{sen}\,B}{R} \quad \text{de donde resulta} \quad \log a = \log b + \log R - \log \text{sen}\,B$$

$$b = c\frac{\text{tang}\,B}{R} \quad \text{que da} \quad \log c = \log b + \log R - \log \text{tang}\,B.$$

Para comprobar los valores hallados para a y c, podemos calcular nuevamente el ángulo C (67) por la fórmula

$$\log \text{sen}\,C = \log c + \log R - \log a.$$

69. 4.° Caso. *Conociendo los dos catetos, hallar la hipotenusa* a *y los ángulos* B *y* C.

Se calculará el ángulo B por el teorema del n.° 59, es decir, por la fórmula

$$b = c\frac{\text{tang } B}{R}, \text{ de la cual resulta}$$

$$\log \text{tang } B = \log b + \log R - \log c.$$

Conocido ya el ángulo B, la ecuacion $C = 90° - B$ dará el valor de C, y por último, tendremos la hipotenusa a por el teorema del número 57, que da

$$b = a\frac{\text{sen } B}{R}, \text{ de la que se deduce que}$$

$$\log a = \log b + \log R - \log \text{sen } B.$$

Por medio del teorema de Pitágoras (66), se puede comprobar si estos valores son exactos, calculando nuevamente c.

§ II.—Triángulos oblicuángulos.

70. 1.er Caso. *Resolver un triángulo conociendo uno de sus lados y dos ángulos.*

Se hallará inmediatamente el tercer ángulo tomando el suplemento de los dos que se conocen. Uno de los lados incógnitos quedará determinado por la relacion que existe entre dos lados y los ángulos opuestos, es decir, valiéndonos del teorema del n.° 61: de modo que si es c el lado que se dió conocido, estableceremos las ecuaciones

$$c \text{ sen } A = a \text{ sen } C, \text{ de la cual se deduce}$$

$$\log a = \log c + \log \text{sen } A - \log \text{sen } C;$$

$$c \text{ sen } B = b \text{ sen } C, \text{ que da}$$

$$\log b = \log c + \log \text{sen } B - \log \text{sen } C.$$

71. 2.° Caso. *Dados dos lados* a *y* b *y el ángulo* A *opuesto al primero, calcular el tercer lado* c *y los dos ángulos* B y C.

Para calcular el ángulo B será necesario emplear una fórmula que contenga los datos a, b, A y la incógnita B. Recurriremos por consiguiente al teorema del n.° 61, y en su virtud, estableceremos la ecuacion

$$a \text{ sen } B = b \text{ sen } A, \text{ de la cual } \log \text{sen } B = \log b + \log \text{sen } A - \log a.$$

Aquí se presenta una dificultad que hasta ahora no habia ocurrido;

que el ángulo B viene dado por su seno, y por lo tanto, es ptible, por lo general, de dos valores, puesto que el seno lo o pertenece á un ángulo que al suplemento de este. Así no saos, en este caso, si tomar el valor menor que 90°, indicado la tabla de los senos, ó su suplemento.

Si el ángulo A es recto ú obtuso, claro es que B tiene que ser agudo, y entonces no hay duda; pero supongamos que A sea menor que 90°, y podrán presentarse tres casos, segun que $a > b$, $a = b$, $a < b$.

En los dos primeros, B es agudo, porque tiene que ser menor que A ó igual á A, segun sabemos por la geometría elemental. Pero si $a < b$ el ángulo $A < B$, y esta condicion lo mismo queda satisfecha tomando para valor del ángulo B el ángulo que dan las tablas, que tomando su suplemento, pues el cálculo dará para B un valor mayor que el de A. Con efecto, la ecuacion $b \operatorname{sen} A = a \operatorname{sen} B$ prueba que siendo $a < b$ será $\operatorname{sen} A < \operatorname{sen} B$, y como el mayor de dos ángulos agudos es el que tiene mayor seno (**13**), se deduce de aquí que $B > A$. Luego *tendrá dos soluciones este problema en el caso de que el ángulo A sea agudo y se verifique además que* $a < b$.

Conviene observar que, suponiendo el radio igual á la unidad, para que este problema sea posible, es necesario que de la ecuacion $b \operatorname{sen} A = a \operatorname{sen} B$ resulte para $\operatorname{sen} B$ un valor menor que la unidad (**13**), lo cual exige que $b \operatorname{sen} A < a$. En efecto, $b \operatorname{sen} A$ es la medida de la perpendicular CI, bajada desde el extremo C (*Fig.* 11) del lado $AC = b$ al lado AB (**57**), y es evidente que no puede existir el triángulo ABC, si a es menor que aquella perpendicular.

Toda esta discusion está perfectamente acorde con la que nos sirvió para la construccion geométrica de un triángulo cuando se conocian dos lados b y a, y el ángulo A (*Geomet.*, **210**).

Una vez conocido ya el ángulo B, determinaremos el C por la ecuacion $C = 180° - (A + B)$, y el lado c por la

$$c \operatorname{sen} A = a \operatorname{sen} C.$$

72. Si se quiere calcular directamente el lado c en funcion de los datos, se deberá emplear una fórmula en que entren á la vez los tres lados y el ángulo A: por lo que haremos uso del teorema fundamental (**55**).

$$2bc \cos A = b^2 + c^2 - a^2, \quad \text{de donde} \quad c^2 - 2b \cos A . c + b^2 - a^2 = 0.$$

De esta ecuacion se saca

$$c = b\cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \operatorname{sen}^2 A}$$

cuya fórmula no es calculable por logaritmos, por lo cual vamos á transformarla en otra que lo sea. Para esto, conforme con la regla del n.° 64, pongo a^2 por factor comun en la cantidad sub-radical, lo que dará $a^2\left(1 - \frac{b^2 \operatorname{sen}^2 A}{a^2}\right)$, y como $\frac{b \operatorname{sen} A}{a}$ no excede de la unidad (pues de lo contrario el valor de c seria imaginario, y no habria necesidad de calcularle), supongo que $\frac{b \operatorname{sen} A}{a} = \operatorname{sen} \varphi$; con esto el valor de c se reduce á

$$c = b\cos A \pm a\cos\varphi,$$

cantidad binomia, y como tal reducible á monomio (64). Para hacer esta reduccion del modo mas fácil, sustituyo en vez de b su valor $\frac{a \operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen} A}$ sacado de la ecuacion de condicion, y hallaré

$$c = \frac{a(\operatorname{sen}\varphi \cos A \pm \operatorname{sen} A \cos\varphi)}{\operatorname{sen} A},$$

de donde resulta, teniendo presentes las fórmulas [13] y [15],

$$c = \frac{a \operatorname{sen}(\varphi \pm A)}{\operatorname{sen} A}.$$

Así es que calcularemos primeramente el ángulo φ por la fórmula

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{b \operatorname{sen} A}{a},$$

despues se sustituirá el valor que den las tablas para φ en la última expresion del de c, y obtendremos fácilmente esta incógnita.

Debemos además observar que esta solucion está comprendida en la primera (71). Efectivamente, en virtud de la ecuacion que determina el ángulo φ, este es igual ó suplementario del B, porque sus senos son iguales : por consiguiente, $\operatorname{sen}(\varphi \pm A) = \operatorname{sen}(B' \pm A)$ ó $= \operatorname{sen}(180° - B' \pm A) = \operatorname{sen}(B' \mp A)$, llamando B' al valor que den las tablas para el ángulo B; de modo que $c = \frac{a \operatorname{sen}(B' \pm A)}{\operatorname{sen} A}$. Pero el cálculo del n.° 71 da

$$\operatorname{sen} C = \operatorname{sen}(180° - B' - A) = \operatorname{sen}(B' + A)$$

ó bien $\operatorname{sen} C = \operatorname{sen}(180° - 180° + B' - A) = \operatorname{sen}(B' - A)$

luego resulta

$$c=\frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}=\frac{a \operatorname{sen}(B' \pm A)}{\operatorname{sen} A}.$$

La fórmula $c=\frac{a \operatorname{sen}(\varphi \pm A)}{\operatorname{sen} A}$ dará lugar á una discusion análoga á la que hemos hecho respecto al ángulo B, y es un ejercicio que no debe pasarse por alto. Tambien se puede observar que la ecuacion $\operatorname{sen} \varphi=\frac{b \operatorname{sen} A}{a}$ da una infinidad de valores para φ comprendidos todos en las fórmulas $\varphi=2k\pi+\alpha$, y $\varphi=(2k+1)\pi-\alpha$, llamando α al menor de los ángulos que tienen por seno $\frac{b \operatorname{sen} A}{a}$ (14); mas se traerá inmediatamente esta discusion al caso en que $\varphi=\alpha$.

73. 3.er Caso. *Resolver un triángulo conociendo dos de sus lados* a *y* b, *y el ángulo comprendido* C.

Hay que hallar los ángulos A y B y el tercer lado c. Vamos á exponer los dos métodos, que á semejanza del caso anterior, se pueden seguir para determinar estas incógnitas.

1.er Metodo. Por ser conocido el ángulo C, lo será la semi-suma de los otros dos, restando $\frac{C}{2}$ de 90°. La semi-diferencia de los mismos puede calcularse fácilmente por medio del teorema del n.° 62: así, suponiendo que a sea mayor que b estableceremos la ecuacion

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tang} \frac{A+B}{2}}{\operatorname{tang} \frac{A-B}{2}},$$

de la cual se deduce que

$$\log \operatorname{tang} \frac{A-B}{2}=\log \operatorname{tang} \frac{A+B}{2}+\log (a-b)-\log (a+b).$$

Buscaremos en las tablas trigonométricas el valor que resulte para el logaritmo de tang $\frac{A-B}{2}$, y á su lado hallaremos escrito el del ángulo $\frac{A-B}{2}$. Combinando ahora estas ecuaciones $\frac{A+B}{2}$ y $\frac{A-B}{2}$ por suma y por resta, tendremos los de A y B.

Conociendo estos ángulos, se calculará el lado c por el teorema del n.° 61,

$$c \operatorname{sen} A = a \operatorname{sen} C \text{ (*)}.$$

74. 2.° Metodo. Vamos á calcular directamente el lado c por la ecuacion

$$2ab \cos C = a^2 + b^2 - c^2, \quad \text{de donde} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C;$$

pero el segundo miembro no puede calcularse por logaritmos; por lo cual vamos á darle otra forma. Para esto, sustituiremos en vez de $\cos C$ su valor expresado en funcion de $\cos \frac{C}{2}$, ó de $\operatorname{sen} \frac{C}{2}$ segun las fórmulas [21] y [22]; por ejemplo, $(2 \cos^2 \frac{C}{2} - 1)$, y así tendremos

$$c^2 = (a+b)^2 - 4ab \cos^2 \frac{C}{2}.$$

Aplicando ahora á esta fórmula el método del n.° 64, se hallará

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{2 \cos \frac{C}{2}}{a+b} \sqrt{ab} \text{ (**)}, \quad \text{y despues} \quad c = (a+b) \frac{\cos \varphi}{R},$$

(*) Para tener el valor de c, por medio de esta fórmula, hay que buscar tres nuevos logaritmos; pero calculándole de otro modo, solamente se necesitarian dos. Con efecto, de la série de razones

$$a : \operatorname{sen} A :: b : \operatorname{sen} B :: c : \operatorname{sen} C,$$

se saca

$$a - b : \operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B :: c : \operatorname{sen} C,$$

de donde

$$c = \frac{(a-b) \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B}.$$

Pero como $\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2} = 2 \operatorname{sen} \frac{A-B}{2} \operatorname{sen} \frac{C}{2}$, y $\operatorname{sen} C = 2 \operatorname{sen} \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}$, resulta

$$c = \frac{(a-b) \cos \frac{C}{2}}{\operatorname{sen} \frac{A-B}{2}},$$

en que el logaritmo de $(a-b)$ es conocido.

(**) No cabe duda en que puede establecerse esta ecuacion, pues como un triángulo en el cual se conocen dos lados y el ángulo comprendido siempre puede existir, es necesario que de la ecuacion precedente resulte para c un valor real, lo que exige que $\frac{4ab}{(a+b)^2} \cos^2 \frac{C}{2} < 1$. Además, si se añade $4ab$ á los dos miembros de la desigualdad $(a-b)^2 > 0$, resultará $(a+b)^2 > 4ab > 4ab \cos^2 \frac{C}{2}$.

de cuyas ecuaciones se saca

$$\log \operatorname{sen} \varphi = \frac{\log a + \log b}{2} + \log 2 + \log \cos \frac{C}{2} - \log (a+b),$$

y

$$\log c = \log (a+b) + \log \cos \varphi - \log R.$$

En la primera calcularemos el ángulo φ, y sustituyendo su valor en la segunda, tendremos el de c.

Ahora falta conocer los ángulos A y B; mas para evitar la ambigüedad que ocurre siempre que un ángulo viene determinado por su seno, á no ser que se conozca *á priori* si es agudo ú obtuso, calcularemos primeramente el menor de los dos ángulos A y B. Así pues, suponiendo que $a > b$, estableceremos la ecuacion

$$c \operatorname{sen} B = b \operatorname{sen} C,$$

de la que sacaremos log sen B, y tomaremos para B el valor tabular correspondiente, porque este ángulo tiene que ser $< 90°$. Para obtener A, no hay mas que tomar el suplemento de B+C; pero es mejor calcular su valor por la fórmula

$$c \operatorname{sen} A = a \operatorname{sen} C,$$

en lo que no puede haber ambigüedad, pues conociendo ya B y C, está determinada la naturaleza del ángulo A. Como comprobacion de todos los cálculos, conviene examinar si la suma de los tres ángulos A, B y C vale 180°.

75. 4.° Caso. *Resolver un triángulo conociendo sus tres lados.*

Determinando el ángulo A por el teorema fundamental (55), hallaremos

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

fórmula que necesitamos preparar para el cálculo logarítmico, para lo cual observaremos que añadiendo la unidad á ambos miembros, se reduce el segundo á un binomio que será $\frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc}$, y el primero $1 + \cos A$, se convierte inmediatamente (33) en el monomio $2 \cos^2 \frac{A}{2}$. Así resulta

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{4bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc},$$

porque la diferencia de los cuadrados de dos cantidades es igual

al producto de la suma de estas por su diferencia. Representando por $2p$ el perímetro del triángulo, es decir, suponiendo que

$$2p = a + b + c,$$

tendremos
$$b + c - a = 2(p - a),$$

y por lo tanto
$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{p(p-a)}{bc},$$

de donde se saca, extrayendo la raíz cuadrada y restituyendo el radio,

$$\cos \frac{A}{2} = R\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \qquad [53].$$

No se pone el doble signo $\pm$ delante del radical, porque $\cos \frac{A}{2}$ es esencialmente positivo. Esta fórmula manifiesta que *para calcular el coseno de la mitad de un ángulo de un triángulo, hay que restar del semi-perímetro el lado opuesto al ángulo, multiplicar la resta por el semi-perímetro, dividir el resultado por el producto de los lados que comprenden al ángulo que se busca, extraer la raíz cuadrada de este cociente y multiplicarla por el radio.*

Para que sea posible la resolucion de este triángulo, se necesita: 1.° que el valor de $\cos \frac{A}{2}$ sea real; 2.° que sea menor que R. Vamos á expresar sucesivamente estas condiciones. La primera exige que $(p-a) = \frac{b+c-a}{2}$ sea positivo, ó lo que es lo mismo, que $a < b + c$. Para satisfacer á la segunda, hay que suponer que

$$\frac{p(p-a)}{bc} < 1,$$

de donde se saca sucesivamente

$$(b+c+a)(b+c-a) < 4bc, \quad (b+c)^2 - a^2 < 4bc,$$
$$(b-c)^2 < a^2, \quad \pm(b-c) < a,$$

conforme sea $b >$ ó $< c$ (*Alg.*, 164). Así para que el problema pueda ser resuelto, es necesario, y suficiente, que el lado opuesto al ángulo A sea menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia. En cuanto se conozca el ángulo A, se calcularán los otros dos por fórmulas análogas, y nunca podrá suceder que resulten para $\cos \frac{B}{2}$ ni $\cos \frac{C}{2}$ valores imaginarios ni mayores que el ra-

dio R, pues estando ya conocido A, conocemos un ángulo y los dos lados que le forman, y la existencia de un triángulo siempre es posible con estos datos.

Si en vez de añadir una unidad á los dos miembros de $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, la hubiésemos restado, la fórmula resultante hubiera sido

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2} = R\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \qquad [54],$$

con la que tambien se puede calcular el ángulo A.

Dividiendo esta por la que da $\cos\frac{A}{2}$ hallaremos (21)

$$\operatorname{tang}\frac{A}{2} = R\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \qquad [55],$$

que sirve asimismo para conocer A.

La primera de estas tres fórmulas [53], [54] y [55], es la que da con mas facilidad el ángulo A; pero si hubiese que calcular los tres A, B y C, convendria hacer uso de la última [55], porque de este modo no se necesita buscar mas que cuatro logaritmos, mientras que valiéndonos de la [53], seria necesario buscar los de los siete números a, b, c, $(p-a)$, $(p-b)$, $(p-c)$ y p; y los de los seis primeros si se emplease la [54].

Es muy conveniente discutir las fórmulas que determinan $\operatorname{sen}\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$ y $\operatorname{tang}\frac{A}{2}$, y para facilitar esta discusion, se harán hipótesis sobre las longitudes relativas de los tres lados, suponiendo, por ejemplo, que a sea el mayor.

76. Algunas veces conviene valuar el área de un triángulo en funcion de los elementos que sirven para determinarle. Por esta razon, vamos á buscar la expresion de este área en los cuatro casos en que hemos resuelto el triángulo; pero para mayor sencillez principiaremos por el tercero.

1.° *Se dan dos lados* b *y* c *y el ángulo comprendido* A.

Bajando desde el vértice C (*Fig.* 11) la perpendicular CI á la base, se tendrá evidentemente (57) $CI = b \operatorname{sen} A$, y llamando S al área del triángulo

$$S = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A; \qquad [56];$$

por lo cual *el área de un triángulo es igual á la mitad del producto de dos lados por el seno del ángulo comprendido.*

Aplicando los logaritmos á esta fórmula, resultará

$$\log S = \log b + \log c + \log \operatorname{sen} A - (\log R + \log 2).$$

2.° *Se da el lado* c *y los dos ángulos* A y B.

Se tiene en este caso $S = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A$; pero (61) $b = \frac{c \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C} = \frac{c \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen}(A+B)}$; luego

$$S = \frac{c^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}{2 \operatorname{sen}(A+B)} \qquad [57].$$

3.° *Se conocen los lados* a *y* b *y el ángulo* A.

Ahora será $S = \frac{ab \operatorname{sen} C}{2}$ ó $S = \frac{ab \operatorname{sen}(A+B)}{2}$, en donde B estará conocido por la relacion

$$\operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} A}{a} \ (61).$$

4.° *Se dan los tres lados.* El área será $S = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A$; pero multiplicando el doble del valor hallado para $\operatorname{sen} \frac{A}{2}$ (75) por el de $\cos \frac{A}{2}$, y suponiendo que el radio es igual á la unidad lineal, se tendrá (32)

$$\operatorname{sen} A = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc}$$

de donde

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

77. Aplicaciones. I. *Resolver un triángulo rectángulo cuando se conoce su hipotenusa y la razon de los dos catetos. — Calcular su área.*

II. *Resolver un triángulo rectángulo conociendo su perímetro y la razon de la hipotenusa á la suma de los catetos.*

III. *Resolver un triángulo rectángulo cuya área y perímetro sean conocidos.*

IV. *Resolver un triángulo rectángulo en el cual se conozca la hipotenusa y la diferencia de los dos catetos.*

V. *Resolver un triángulo conociendo sus ángulos y su área.*

VI. *Resolver un triángulo conociendo un ángulo, uno de los lados adyacentes, y la suma ó diferencia de los otros dos lados.*

VII. *Resolver un triángulo cuando se conoce un ángulo, el lado opuesto, y la suma ó diferencia de los otros dos lados.*

VIII. *Calcular en funcion de los cuatro lados el área de un cuadrilátero inscribible.*

Se suman las áreas de los dos triángulos en que le descompone una de las diagonales, se elimina del resultado el ángulo que contiene, aplicando sucesivamente á estos dos triángulos el teorema del n.° **55**, y se hallará la fórmula que se busca, que es

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

IX. *Calcular el área de un cuadrilátero cuando se conocen las dos diagonales y el ángulo que estas forman.*

CAPÍTULO VI.

APLICACIONES PRÁCTICAS.

78. *Medir la altura que un punto A, situado en el espacio, tiene sobre un plano horizontal dado, y la distancia desde aquel punto á otro B que se conoce en este plano (Fig. 15).*

Se medirá con la mayor exactitud en el plano dado una *base* BC, que tenga uno de sus extremos en el punto B, y colocando un grafómetro de manera que su centro esté en la vertical que pasa por aquel punto, se hará que el anteojo fijo quede horizontal y dirigido hácia un jalon que se habrá puesto en el otro extremo C de la base: se dirigirá el anteojo móvil al punto A, y se leerá en el limbo del instrumento el número de grados y de partes de grado comprendidos entre las dos visuales B′A y B′C′. Hecho esto, se pondrá el grafómetro de modo que pasando su plano por el punto A, coincida la direccion del hilo de una plomada con la recta que determinan el centro del instrumento y la division de los 90°, con lo cual quedará horizontal el anteojo fijo: con el móvil se apuntará al punto A, y se leerá el arco que mide al ángulo AB′D′. Finalmente, trasladándose á C, se medirá el ángulo AC′B′ y será ya fácil determinar las incógnitas del problema. En efecto, se puede calcular el lado AB′ del triángulo AB′C′, pues se conocen un lado y dos ángulos, y esto nos dará la distancia desde A á B′, y por consiguiente la de A á B, porque es evidente que se puede sin error sensible sustituir á la recta AB una media proporcional aritmética entre la recta AB′ y la quebrada (AB′+B′B), sobre todo si la distancia AB′ es algo considerable (*). Resolviendo despues el triángulo rectángulo AD′B′, determinado por su hipotenusa AB′ y el ángulo AB′D′, se tendrá el cateto AD′, que sumado con la altura del ins-

(*) Ademas de que si se quiere calcular con toda exactitud la distancia AB, no hay mas que resolver el triángulo AB′B en el cual se conocen los lados AB′ y BB′, y el ángulo comprendido AB′B = AB′D′ + 90°.

trumento BB′, dará la elevacion del punto A sobre el plano horizontal en que se midió la base BC.

Si estando el grafómetro en la posicion que hemos dicho que se le dé para medir el ángulo AB′D′, se planta un jalon EE′ en la direccion del anteojo fijo, no habrá mas que medir el ángulo E′B′C′, cuyos lados son horizontales, para determinar la proyeccion D del punto A sobre el plano horizontal, pues resolviendo el triángulo rectángulo AB′D′ se conocerá la distancia B′D′.

Supongamos que se haya obtenido BC $=257^m,36$, AB′D′ $=64^\circ\ 36'\ 28''$, AC′B′ $=62^\circ\ 48'16''$, y AB′D′ $=38^\circ\ 17'12''$; haremos el cálculo siguiente

$B'AC'=52^\circ\ 35'16''$,	$AD'=c.\dfrac{\text{sen}\,AB'D'}{R}$
$c\,\text{sen}\,A=a\,\text{sen}\,C$	
$\log a=2,410\ 5410$	$\log c=2,459\ 6870$
$\log\text{sen}\,C=9,949\ 1224$	$\log\text{sen}\,AB'D'=9,792\ 1088$
$12,359\ 6634$	$12,251\ 7958$
$\log\text{sen}\,A=9,899\ 9764$	$\log R=10$
$\log c=2,459\ 6870$	$\log AD'=2,251\ 7958$
$c=288^m,20$	$AD'=178^m,56$

Con lo cual, suponiendo que BB′ $=1^m,15$, se tendrá AD $=179^m,71$ y AB $=288^m,20+0^m,575=288^m,77$.

79. ***Determinar la distancia que hay entre dos puntos inaccesibles*** **A y B** (*Fig.* 16).

Se medirá una base CD y los ángulos AC′D′, AC′B, BC′D′, AD′C′ y BD′C′ (78), en los cuales el lado C′D′ es horizontal; se resolverán los triángulos AC′D′ y BC′D′, con lo cual conoceremos los lados AC′ y BC′ del triángulo ABC′, y como ya teniamos el ángulo AC′B que comprenden, podremos resolverle y hallar por consiguiente el lado AB que se buscaba (73, 74).

Pero debemos observar que, sin pasar de los logaritmos de AC′ y de BC′ á los números correspondientes, se podrá calcular el lado AB, pues si en la fórmula

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}\,(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\,(A+B),$$

que sirve para calcular la semi-diferencia de los ángulos A y B se divide por a, que suponemos mayor que b, los dos términos del

quebrado $\frac{a-b}{a+b}$, resultará $\frac{1-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}}=\frac{1-\operatorname{tang}\varphi}{1+\operatorname{tang}\varphi}$, suponiendo $\frac{b}{a}=\operatorname{tang}\varphi$.

Mas en virtud de la fórmula [45], puede considerarse que esta expresion es la de tang $(45^{\circ}-\varphi)$, por consiguiente

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A-B)=\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B)\operatorname{tang}(45^{\circ}-\varphi).$$

Supongamos que se haya encontrado

$$CD=270^{m};\quad AC'D'=102^{\circ}48'57'',\quad AC'B=54^{\circ}43'36'',$$
$$BC'D'=52^{\circ}6'17'',\quad BD'C'=93^{\circ}58'46'',\quad AD'C'=44^{\circ}18''.$$

Y deduciremos de estos valores que $C'AD'=33^{\circ}10'45''$, y que $C'BD'=33^{\circ}54'57''$.

Cálculo para hallar AC′.

$AC'.\text{sen}\,A=C'D'.\text{sen}\,AD'C'$.

$\log C'D'=2{,}431\ 3638$
$\log\text{sen}\,AD'C'=9{,}841\ 8105$
$12{,}273\ 1743$
$\log\text{sen}\,C'AD'=9{,}738\ 1929$
$\log AC'=2{,}534\ 9814=\log b$

Cálculo para hallar BC′.

$BC'.\text{sen}\,C'BD'=C'D'.\text{sen}\,BD'C'$

$\log C'D'=2{,}431\ 3638$
$\log\text{sen}\,BD'C'=9{,}998\ 9517$
$12{,}430\ 3155$
$\log\text{sen}\,C'BD'=9{,}746\ 6143$
$\log BC'=2{,}683\ 7012=\log a$

Cálculo para φ.

$\operatorname{tang}\varphi=\frac{b.R}{a}$

$\log b+\log R=12{,}534\ 9814$
$\log a=2{,}683\ 7012$
$\log\operatorname{tang}\varphi=9{,}851\ 2802$
$\varphi=35^{\circ}22'34''$
$45^{\circ}-\varphi=9^{\circ}37'26''$

Cálculo para $\frac{1}{2}(A-B)$.

$\frac{1}{2}(A+B)=62^{\circ}38'12''$

$\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B)=10{,}286\ 0568$
$\log\operatorname{tang}(45^{\circ}-\varphi)=9{,}229\ 3394$
$19{,}515\ 3962$
$\log R=10$
$\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A-B)=9{,}515\ 3962$

$\frac{1}{2}(A-B)=18^{\circ}8'27''$

De los valores de $\frac{1}{2}(A+B)$ y de $\frac{1}{2}(A-B)$ resulta que $B=44^{\circ}29'45''$; se establecerá la ecuacion

$$AC'.\text{sen}\,AC'B=AB.\text{sen}\,B,$$

y obtendremos

$$\begin{array}{rl} \log AC' = & 2,534\ 9814 \\ \log \operatorname{sen} AC'B = & 9,941\ 9064 \\ \hline & 12,446\ 8878 \\ \log \operatorname{sen} B = & 9,845\ 6296 \\ \hline \log AB = & 2,601\ 2582 \end{array} \quad AB = 399^{m},26.$$

80. ***Dados tres puntos A, B, C (Fig. 17), en la carta de un pais, se quiere determinar la posicion de un cuarto punto M, situado en el mismo plano que los tres primeros, y desde el cual puede descubrirse á estos.***

Trasladándonos al punto M, mediremos los dos ángulos AMC y BMC que forman las visuales dirigidas á los tres puntos designados en el mapa por A, B, C: sobre AC y BC describiremos dos arcos de círculo capaces de medir estos ángulos, y la interseccion de dichos arcos nos dará el punto pedido. Esta construccion no será suficientemente exacta, por lo cual calcularemos los dos ángulos CAM y CBM, y esto bastará para fijar el punto M. Para comprobar si está bien la posicion que para este punto resulte, podemos calcular tambien el valor de CM.

Supongamos que son a y b las distancias conocidas AC y BC, C el ángulo conocido ACB, α y β los ángulos que se han medido AMC y BMC, x é y los buscados CAM y CBM. Observemos en primer lugar que por ser ACBM un cuadrilátero plano, tendremos la ecuacion

$$x+y+C+\alpha+\beta=360^{0},$$

de donde se deduce que

$$x+y=360^{0}-(C+\alpha+\beta);$$

ecuacion que nos da la suma de los ángulos x é y en cantidades conocidas, por lo cual quedaria resuelto el problema si pudiésemos obtener la diferencia de los mismos ángulos. Pero el teorema del número 61 nos dará

$$MC=\frac{a \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} \alpha}=\frac{b \operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} \beta} \qquad [k],$$

de la que resulta

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y}=\frac{b \operatorname{sen} \alpha}{a \operatorname{sen} \beta}$$

y de esta

$$\frac{\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y}=\frac{b \operatorname{sen} \alpha-a \operatorname{sen} \beta}{b \operatorname{sen} \alpha+a \operatorname{sen} \beta}.$$

El primer miembro de esta ecuacion puede transformarse en virtud del teorema del n.° 37 en

$$\frac{\tan\frac{1}{2}(x-y)}{\tan\frac{1}{2}(x+y)}.$$

Y dividiendo los dos miembros del segundo por b sen α, suponiendo que $\tan\varphi=\frac{a \operatorname{sen}\beta}{b \operatorname{sen}\alpha}$ tomará la forma de,

$$\frac{1-\tan\varphi}{1+\tan\varphi},$$

cantidad que es igual á $\tan(45°-\varphi)$, como hemos observado en el n.° 79; luego por fin tendremos, restableciendo el radio

$$\tan\frac{x-y}{2}=\frac{\tan\frac{x+y}{2}\tan(45°-\varphi)}{R}.$$

Esta ecuacion dará á conocer el valor de $\frac{x-y}{2}$, y combinándole primeramente por suma y luego por resta con el de $\frac{x+y}{2}$, tendremos los de los ángulos x é y, y por consecuencia la distancia MC, valiéndonos de la fórmula [k].

Supongamos que

$a=200^m$, $b=170^m$, $\alpha=46°17'13'',2$, $\beta=30°9'$, $C=114°40'8'',4$.

se tendrá $\frac{C+\alpha+\beta}{2}=95°33'10'',8$,

y por consiguiente $\frac{x+y}{2}=84°26'49'',2$.

$$\begin{array}{rl}
\log R+\log a= & 12{,}301\ 0300\\
\log \operatorname{sen}\beta= & 9{,}700\ 9334\\
\hline
 & 22{,}001\ 9634\\
 & 12{,}089\ 4733\\
\hline
\log\tan\varphi= & 9{,}912\ 4901\ ;
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\log b= & 2{,}230\ 4489\\
\log \operatorname{sen}\alpha= & 9{,}859\ 0244\\
\hline
 & 12{,}089\ 4733
\end{array}$$

$\varphi=39°15'58'',14$; $45°-\varphi=5°44'1'',86$.

$$\log \tang (45-\varphi) = 9{,}001\ 7769$$

$$\log \tang \frac{x+y}{2} - \log R = 1{,}012\ 2322$$

$$\log \tang \frac{x-y}{2} = 10{,}014\ 0091 \ldots \frac{x-y}{2} = 45^{\circ}55'26'',2,$$

y como $\frac{x+y}{2} = 84^{\circ}26'49'',2$;

resulta $x = 130^{\circ}22'15''$ ó $y = 38^{\circ}31'23''$.

$$\log b = 2{,}230\ 4489$$
$$\log \operatorname{sen} y = 9{,}794\ 3691$$
$$12{,}024\ 8180$$
$$\log \operatorname{sen} \beta = 9{,}700\ 9334$$
$$\log MC = 2{,}323\ 8846, \quad MC = 210^{m},81.$$

81. PROBLEMA I. *Determinar el diámetro de un estanque circular inaccesible en cuya circunferencia no haya punto alguno que se pueda distinguir.* Desde los extremos de una base AB (*Fig.* 18) dirijanse las visuales AC y AC′, BD y BD′, tangentes á la circunferencia del estanque; mídanse los ángulos que forman con AB, dedúzcanse de aquí los valores de los ángulos CAO, OAB y OBA, y tendremos los de las rectas AO y OC.

II. *Dados tres puntos inaccesibles, observar si están en línea recta* (79).

III. *Reconocer si cuatro puntos inaccesibles* A, B, C, M (*Fig.* 17) *están en un mismo plano, y en caso de que lo estén, si el cuadrilátero que forman es inscribible.*

Calcúlense las distancias (79) entre cada dos de estos puntos, y dedúzcanse de ellas los valores de los ángulos BAC, BAM y CAM, y si el último vale tanto como la suma de los otros dos, inferiremos que A, B, C y M están en un mismo plano. En este caso no falta mas que determinar el ángulo CBM, y comparándole con CAM conoceremos si estos cuatro puntos se hallan sobre una circunferencia de círculo.

CAPÍTULO VII.

FÓRMULAS PARA LA RESOLUCION DE LOS TRIÁNGULOS ESFÉRICOS.

82. TEOREMA. *En todo triángulo esférico el producto del coseno de un ángulo por el seno de los lados que le comprenden, es igual á la diferencia que hay entre el coseno del lado opuesto y el producto de los cosenos de los otros dos lados.*

Sea ABC (*Fig.* 19) un triángulo esférico cualquiera. Unamos sus tres vértices al centro O de la esfera á que este triángulo pertenece, y tiremos á los lados AB y AC las tangentes AD y AE que supondremos terminadas en los puntos en que cortan á las prolongaciones de los radios OB y OC. Suponiendo que se toma por unidad lineal al radio de esta esfera, y designando por A, B, C los ángulos del triángulo, y por *a*, *b*, *c*, los lados opuestos respectivamente á estos, tendremos

$$\mathrm{AD}=\mathrm{tang}\, c=\frac{\mathrm{sen}\, c}{\cos c},\quad \mathrm{OD}=\sec c=\frac{1}{\cos c},$$
$$\mathrm{AE}=\mathrm{tang}\, b=\frac{\mathrm{sen}\, b}{\cos b},\quad \mathrm{OE}=\sec b=\frac{1}{\cos b}.$$

Establecido esto, tiremos la recta DE, y aplicando sucesivamente á los dos triángulos ADE y ODE el teorema fundamental de la trigonometría rectilínea (55), resultará

$$2\mathrm{AD.AE}\cos \mathrm{A}=\overline{\mathrm{AD}}^2+\overline{\mathrm{AE}}^2-\overline{\mathrm{DE}}^2,$$
$$2\mathrm{OD.OE}\cos a=\overline{\mathrm{OD}}^2+\overline{\mathrm{OE}}^2-\overline{\mathrm{DE}}^2;$$

porque el ángulo DAE no es otra cosa que el ángulo A del triángulo esférico, y el lado *a* es la medida del ángulo DOE (*Geometría*, 556). Restando miembro á miembro las dos ecuaciones anteriores, y teniendo presente que $\overline{\mathrm{OD}}^2-\overline{\mathrm{AD}}^2=\overline{\mathrm{OA}}^2=1$, y que $\overline{\mathrm{OE}}^2-\overline{\mathrm{AE}}^2=\overline{\mathrm{OA}}^2=1$, hallaremos

$$2\mathrm{OD.OE}\cos a-2\mathrm{AD.AE}\cos \mathrm{A}=2,$$

de donde dividiendo por 2 los dos miembros, sustituyendo en lu-

gar de OD, OE, AD y AE sus valores, quitando denominadores y transponiendo, se tendrá finalmente

$$\text{sen}\, b\, \text{sen}\, c \cos A = \cos a - \cos b \cos c \qquad [\alpha],$$

cuya fórmula es la traduccion algebráica del teorema enunciado.

83. Como parece que la construccion de que nos hemos servido exige que cada uno de los lados b y c sea menor que un cuadrante, conviene probar que la ecuacion [α] es general. Para conseguirlo bastará considerar los cuatro casos que siguen:

1.er Caso. $b>90°$, $c<90°$. Prolongo CA y CB (*Fig.* 20) hasta que se corten en C′, con lo cual formo un triángulo ABC′, que tiene los lados AC′ y AB menores que un cuadrante, de modo que se verificará que

$$\text{sen}\, b' \,\text{sen}\, c \cos BAC' = \cos a' - \cos b' \cos c\,;$$

pero $b'=180°-b$, $a'=180°-a$, y $BAC'=180°-A$;

luego $-\text{sen}\, b\, \text{sen}\, c \cos A = -\cos a + \cos b \cos c,$

ó sea $\text{sen}\, b\, \text{sen}\, c \cos A = \cos a - \cos b \cos c.$

2.° Caso. $b>90°$ y $c>90°$. Se podrá (1.er caso) aplicar el teorema al triángulo ABC′, como acabamos de hacerlo, pues uno de los lados que comprenden al ángulo BAC′ es $<90°$, y por consiguiente será cierto para el triángulo propuesto.

3.er Caso. $b=90°$. Sobre el arco AB (*Fig.* 21) tomo $AA'=90°$ y describo el arco de círculo máximo A′C. De este modo A será el polo de este arco (*Geometria*, **554**) y este arco la medida del ángulo A. Si A′C es igual á 90°, el punto C es el polo del arco AA′ de modo que $CB=a$ vale tambien 90°, y la ecuacion [α] es entonces cierta porque se verifica haciendo en ella $\cos a=0$, $\cos b=0$, $\cos A=\cos A'C=0$.

Si suponemos que CA′ no es un cuadrante, como BA′ tampoco lo es, podemos aplicar la fórmula [α] al ángulo A′ del triángulo A′BC, y tendremos

$$\text{sen}\, BA' \,\text{sen}\, A'C \cos BA'C = \cos BC - \cos BA' \cos A'C\,;$$

pero $\cos BA'C = \cos 90° = 0$, $\cos BC = \cos a$,

$$\cos BA' = \cos\{\pm(90°-c)\} = \text{sen}\, c \text{ y } \cos A'C = \cos A:$$

de consiguiente $0=\cos a - \text{sen}\, c \cos A$, ó sea $\text{sen}\, c \cos A = \cos a$; igualdad que es á la que se reduce la fórmula [α], haciendo en

ella $b=90°$: luego la [α] es cierta aun en el caso que nos ocupa.

4.° Caso. $b=90°$ y $c=90°$. Entonces a es la medida del ángulo A, y la fórmula [α] se reduce á una identidad.

84. Aplicando sucesivamente el teorema del n.° **82** á los tres ángulos del triángulo ABC, se forman las tres ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A = \cos a - \cos b \cos c, \\ \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c \cos B = \cos b - \cos a \cos c, \\ \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C = \cos c - \cos a \cos b\end{array}\right\} \quad [58],$$

que contienen la solucion completa de los triángulos esféricos en todos los casos que pueden ocurrir, pues bastan para calcular en cualquiera de estos, tres de los seis elementos en funcion de los otros tres. Así, pues, se trata de deducir de las ecuaciones [58] unas fórmulas que envuelvan todas las combinaciones de cuatro en cuatro esencialmente diferentes que se pueden hacer con los tres lados y los tres ángulos de un triángulo (**56**); de modo que no habrá mas que buscar cuatro clases de fórmulas, que contengan respectivamente

Tres lados y un ángulo;

Dos lados y los dos ángulos opuestos;

Dos lados, el ángulo comprendido y el opuesto á uno de aquellos;

Un lado y los tres ángulos.

El teorema fundamental satisface á la primera combinacion.

85. Para obtener la segunda combinacion, es decir, una relacion entre los lados a y b, por ejemplo, y los ángulos opuestos A y B, basta eliminar c entre las dos primeras de las ecuaciones [58], y para esto las combino primero por suma y luego por resta, con lo que tendremos

$$\operatorname{sen} c(\operatorname{sen} b \cos A + \operatorname{sen} a \cos B) = (\cos a + \cos b)(1 - \cos c),$$
$$\operatorname{sen} c(\operatorname{sen} b \cos A - \operatorname{sen} a \cos B) = (\cos a - \cos b)(1 + \cos c),$$

cuyas ecuaciones, multiplicadas una por otra miembro á miembro, teniendo presente que $(1+\cos c)(1-\cos c)=\operatorname{sen}^2 c$, y dividiendo por $\operatorname{sen}^2 c$, darán

$$\operatorname{sen}^2 b \cos^2 A - \operatorname{sen}^2 a \cos^2 B = \cos^2 a - \cos^2 b,$$

de la que trasponiendo resulta

$$\operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 A = \operatorname{sen}^2 a \operatorname{sen}^2 B,$$

y por último

$$\operatorname{sen} b \operatorname{sen} A = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B.$$

Esta es la relacion que se buscaba, y por ella vemos que *en todo triángulo esférico los senos de los ángulos son proporcionales á los de los lados opuestos*. En virtud de esto tenemos las tres nuevas ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen} b \operatorname{sen} A = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B\\ \operatorname{sen} c \operatorname{sen} A = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} C\\ \operatorname{sen} b \operatorname{sen} C = \operatorname{sen} c \operatorname{sen} B\end{array}\right\} \qquad [59].$$

86. Para hallar la tercera fórmula, ó sea una relacion entre a, b, A y C por ejemplo, habrá que eliminar c entre la primera y tercera de las ecuaciones [58]; mas como en ellas entran á la vez $\operatorname{sen} c$ y $\cos c$, hay que tomar otra ecuacion que contenga estas cantidades, tomaremos la segunda de las [59]

$$\operatorname{sen} c \operatorname{sen} A = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} C, \quad \text{de donde} \quad \operatorname{sen} c = \frac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}.$$

De la

$$\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C = \cos c - \cos a \cos b$$

sacaremos

$$\cos c = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C + \cos a \cos b,$$

y sustituyendo estos valores de $\operatorname{sen} c$ y $\cos c$ en

$$\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A = \cos a - \cos b \cos c,$$

hallaremos

$$\frac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} C \cos A}{\operatorname{sen} A} = \cos a - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos b \cos C - \cos a \cos^2 b.$$

Dividamos ahora los dos miembros de esta ecuacion por

$$\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos b \cos C,$$

y observando que

$$\cos a - \cos a \cos^2 b = \cos a \operatorname{sen}^2 b,$$

resultará

$$\frac{1}{\cos b} \cot A \operatorname{tang} C = \frac{1}{\cos C} \cot a \operatorname{tang} b - 1,$$

y de esta

$$\frac{\cot a}{\cot b} \cdot \frac{1}{\cos C} = 1 + \frac{\cot A}{\cot C} \cdot \frac{1}{\cos b} \qquad [\beta].$$

De modo que llamando *primer lado y primer ángulo á los que están opuestos uno al otro*, se puede decir que *la razon entre la cotangente del primer lado y la del segundo, multiplicada por la secante del segundo ángulo, es igual á la unidad aumentada con el producto de la razon entre la cotangente del primer ángulo y la del segundo multiplicada por la secante del segundo lado.*

Si en la fórmula [β] se sustituye en vez de las cotangentes de b y de C sus valores $\frac{\cos b}{\operatorname{sen} b}$, y $\frac{\cos C}{\operatorname{sen} C}$, y se quitan los denominadores, resultará, despues de hacer todas las combinaciones posibles con dos lados, el ángulo comprendido y el opuesto á uno de ellos,

$$\left.\begin{array}{l} \cot a \operatorname{sen} b = \cos b \cos C + \cot A \operatorname{sen} C \\ \cot a \operatorname{sen} c = \cos c \cos B + \cot A \operatorname{sen} B \\ \cot b \operatorname{sen} a = \cos a \cos C + \cot B \operatorname{sen} C \\ \cot b \operatorname{sen} c = \cos c \cos A + \cot B \operatorname{sen} A \\ \cot c \operatorname{sen} a = \cos a \cos B + \cot C \operatorname{sen} B \\ \cot c \operatorname{sen} b = \cos b \cos A + \cot C \operatorname{sen} A \end{array}\right\} \quad [60].$$

87. Finalmente, para obtener la cuarta combinacion aplicaremos el teorema fundamental al triángulo A'B'C' suplementario del ABC, es decir, al triángulo esférico comprendido entre las caras del triedro suplementario del que corresponde á ABC. Así, pues, reemplacemos en la fórmula [α] del n.° **82**, a, b, c y A respectivamente por $180^\circ - A$, $180^\circ - B$, $180^\circ - C$ y $180^\circ - a$, y hallaremos

$$\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a = \cos A + \cos B \cos C.$$

Por consiguiente, *el producto del coseno de un lado por los senos de los ángulos adyacentes es igual al coseno del ángulo opuesto disminuido en el producto de los cosenos de los otros dos ángulos.*

Aplicando este teorema á los tres lados a, b, c, se tendrá

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a = \cos A + \cos B \cos C \\ \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C \cos b = \cos B + \cos A \cos C \\ \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \cos c = \cos C + \cos A \cos B \end{array}\right\} \quad [61].$$

88. Los cuatro grupos de fórmulas que acabamos de obtener presentan las quince combinaciones que pueden hacerse con las seis cantidades a, b, c, A, B, C, tomadas de cuatro en cuatro; de modo que para resolver un triángulo esférico bastará elegir aquella que convenga al caso de que se trate, y prepararla convenientemente para el cálculo logarítmico, lo cual será fácil con el auxilio de la trasformacion que hemos indicado en el n.° **65**, pues la incógnita tendrá siempre por expresion un binomio en que uno de los términos contendrá el seno y el otro el coseno de un mismo arco, como demostraremos en el capítulo siguiente.

89. Si el triángulo propuesto fuese rectángulo, en A por ejem-

plo, se podrian simplificar considerablemente las fórmulas que preceden, porque introduciendo esta hipótesis en aquellas de las quince que contengan el ángulo A, se convertirán en

$$\cos a = \cos b \cos c \qquad [62];$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} b &= \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B \\ \operatorname{sen} c &= \operatorname{sen} a \operatorname{sen} C \end{aligned}\right\} \qquad [63];$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang} b &= \operatorname{tang} a \cos C \\ \operatorname{tang} b &= \operatorname{sen} c \operatorname{tang} B \\ \operatorname{tang} c &= \operatorname{tang} a \cos B \\ \operatorname{tang} c &= \operatorname{sen} b \operatorname{tang} C \end{aligned}\right\} \qquad [64];$$

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \cot B \cot C \\ \cos B &= \cos b \operatorname{sen} C \\ \cos C &= \cos c \operatorname{sen} B \end{aligned}\right\} \qquad [65];$$

Estas diez fórmulas, á las que se puede aplicar desde luego el cálculo logarítmico, contienen todas las combinaciones que se pueden hacer con las cinco cantidades a, b, c, B y C, de modo que siempre entren dos datos y una incógnita; por lo tanto dan la solucion completa de los triángulos rectángulos esféricos.

90. La primera de estas ecuaciones

$$\cos a = \cos b \cos c$$

nos manifiesta (*Fig.* 22) que *en todo triángulo esférico rectángulo el coseno de la hipotenusa es igual al producto de los cosenos de los dos catetos. La recíproca es tambien cierta*, por lo que esta proposicion es respecto á los triángulos esféricos, lo que el teorema de Pitágoras para los rectilíneos.

91. Resulta de ésta fórmula [62] que *ó bien cada uno de los tres lados de un triángulo rectángulo esférico es menor que un cuadrante, ó uno solo es menor que* 90°, *y cada uno de los otros mayor;* pues si los tres fueran mayores que 90°, el primer miembro de la ecuacion [62] seria negativo y el segundo positivo.

92. La ecuacion $\operatorname{tang} b = \operatorname{sen} c \operatorname{tang} B$, manifiesta que *un ángulo oblicuo es siempre de la misma especie que su lado opuesto;* es decir, que ambos son menores ó ambos mayores que 90°, pues siendo positivo $\operatorname{sen} c$, $\operatorname{tang} b$ y $\operatorname{tang} B$ tendrán los mismos signos.

93. No traducimos al lenguaje ordinario las diez fórmulas comprendidas en los n.os **62**, **63**, **64** y **65**, porque en cada caso particular de la resolucion de triángulos rectángulos, bastará aplicar

los teoremas demostrados en los n.os **82**, **85**, **86** y **87**, cuyo enunciado comprenderá siempre el ángulo recto A, los dos datos y la incógnita. Por ejemplo, si *se quiere resolver un triángulo en el que se conozca la hipotenusa* a *y el ángulo* B, observaremos:

1.° Que la fórmula que ha de dar b contendrá a, b, A y B, luego virtud del teorema n.° **85**,

$$\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B;$$

2.° que el valor de c dependerá de una ecuacion que contenga los dos lados a, c, el ángulo comprendido B y el opuesto A, de modo que empleando el teorema del n.° **86**, se escribirá la ecuacion

$$\frac{\cot a}{\cot c} \cdot \frac{1}{\cos B} = 1, \quad \text{de donde} \quad \operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a \cos B;$$

3.° que para hallar C se hará uso del cuarto teorema (87), aplicándole á los tres ángulos A, B, C y al lado a, lo que dará

$$\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a = \cos B \cos C, \quad \text{y de aquí} \quad \cot C = \cos a \operatorname{tang} B.$$

CAPITULO VIII.

RESOLUCION DE TRIÁNGULOS ESFÉRICOS.

§ I.—Resolucion de triángulos esféricos rectángulos.

94. Un triángulo esférico puede ser *tri-rectángulo*, y en este caso sus tres lados serán cuadrantes porque el vértice de cada ángulo será polo del lado opuesto : puede ser bi-rectángulo, y entonces cada uno de los lados opuestos á los dos ángulos rectos valdrá 90° y el tercer lado será la medida del otro ángulo : así no vamos á ocuparnos mas que de los triángulos en que *solamente* haya un ángulo recto y los demás sean *oblicuos*.

1.er Caso. *Se da la hipotenusa* a *y un cateto* b, *hallar el cateto* c *y los ángulos* B y C (*Fig.* 22).

Las fórmulas [62], [63] y [64] darán, restableciendo el radio (27),

$$\cos c = \frac{R \cos a}{\cos b}, \quad \text{sen}\, B = \frac{R\, \text{sen}\, b}{\text{sen}\, a}, \quad \cos C = \frac{R\, \text{tang}\, b}{\text{tang}\, a}.$$

No hay ambigüedad, aunque el ángulo B esté dado por su seno, pues este ángulo tiene que ser de la misma especie que el lado b que es conocido (92).

95. 2.° Caso. *Conociendo la hipotenusa* a *y un ángulo* B, *calcular el otro* C *y los catetos* b *y* c.

Empleando las fórmulas [65], [63] y [64] tendremos

$$\cot C = \frac{\cos a\, \text{tang}\, B}{R}, \quad \text{sen}\, b = \frac{\text{sen}\, a\, \text{sen}\, B}{R}, \quad \text{tang}\, c = \frac{\text{tang}\, a \cos B}{R}.$$

96. 3.er Caso. *Dándose los catetos* b *y* c, *hallar la hipotenusa y los ángulos* B *y* C.

Sacaremos de las fórmulas [62] y [64]

$$\cos a = \frac{\cos b \cos c}{R}, \quad \text{tang}\, B = \frac{R\, \text{tang}\, b}{\text{sen}\, c}, \quad \text{tang}\, C = \frac{R\, \text{tang}\, c}{\text{sen}\, b}.$$

97. 4.° Caso. *Conociendo un cateto* b *y el ángulo opuesto* B, *hallar los otros lados* a *y* c *y el ángulo* C.

Las fórmulas [63], [64] y [65] dan

$$\operatorname{sen} a = \frac{R \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B}, \quad \operatorname{sen} c = \frac{R \operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} B}, \quad \operatorname{sen} C = \frac{R \cos B}{\cos b}.$$

Como a, c y C vienen dados por sus senos, cada uno de estos elementos admitirá dos valores, y sin embargo solamente hay en este caso dos soluciones para el problema.

1.° Sea $B < 90°$: $\cos b > 0$ (92), y como $\cos a = \cos b \cos c$, vemos que a y c tienen que ser de la misma especie, lo mismo que c y C, y que segun se tome para a un valor menor ó mayor que 90°, los correspondientes á c y C lo serán tambien.

2.° Si $B > 90°$, $\cos b < 0$ (92), y como $\cos a = \cos b \cos c$, es claro que a y c tienen que ser de distinta especie, mientras que c y C serán ambos menores ó ambos mayores que 90°, y que segun se tome para a un valor $<$ ó $>$ 90°, los correspondientes á c y C serán $>$ ó $<$ 90°.

Siendo preciso que $\operatorname{sen} b < \operatorname{sen} B$ (pues de lo contrario seria $\operatorname{sen} a > R$), no podrá resolverse el problema sino cuando b sea $<$ ó $>$ B, segun que el ángulo B sea agudo ú obtuso.

Si $b = B$, será $a = 90°$, $c = 90°$, $C = 90°$ y el triángulo por consiguiente bi-rectángulo.

La geometría confirma estos resultados del cálculo, pues si ABC (*Fig.* 23) es un triángulo que satisface al problema, no habrá mas que prolongar los lados BA y BC hasta que se encuentren otra vez en B′, y se formará así un nuevo triángulo AB′C rectángulo en A, cuyo cateto AC y ángulo B′ serán iguales á b y B; además CB′, AB′ y el ángulo ACB′ son suplementos de a, c y C.

98. 5.° Caso. ***Dándose el cateto* b *y el ángulo adyacente* C*, hallar los otros dos lados* a *y* c *y el ángulo* B.**

Se deduce de las fórmulas [64] y [65] que

$$\operatorname{tang} a = \frac{R \operatorname{tang} B}{\cos C}, \quad \operatorname{tang} c = \frac{\operatorname{sen} b \operatorname{tang} C}{R}, \quad \cos B = \frac{\cos b \operatorname{sen} C}{R}.$$

99. 6.° Caso. ***Conociendo los dos ángulos oblicuos* B *y* C*, calcular los tres lados* a, b, c.**

Se emplearán las fórmulas [63]

$$\cos a = \frac{\cot B \cot C}{R}, \quad \cos b = \frac{R \cos B}{\operatorname{sen} C}, \quad \cos c = \frac{R \cos C}{\operatorname{sen} B}.$$

§ II.—Resolucion de los triángulos esféricos oblicuángulos.

100. 1.er Caso. *Resolver un triángulo esférico cuando se conocen sus tres lados.*

Como hay que emplear fórmulas que contengan los tres lados y un ángulo, nos servirán las del teorema n.° 82, de la primera de las cuales sacaremos.

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} \qquad [\gamma]$$

Para hacer que esta fórmula sea calculable por logaritmos, operaremos como en el n.° 75, añadiendo una unidad á ambos miembros, y resultará

$$2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{\cos a - \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} = \frac{\cos a - \cos(b+c)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c},$$

de cuya ecuacion se saca (35)

$$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{\operatorname{sen}\frac{a+b+c}{2}\operatorname{sen}\frac{b+c-a}{2}}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c},$$

y si en esta representamos por $2p$ el perímetro $a+b+c$ del triángulo, en cuya hipótesis $b+c-a$ será igual á $2(p-a)$, se convertirá, despues de restablecido el radio, en

$$\cos\frac{A}{2} = R\sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}} \qquad [66].$$

Si en vez de añadir $+1$ á los dos miembros de la ecuacion $[\gamma]$, hubiesemos añadido -1, hubiera resultado, como en el n.° 75,

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2} = R\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}};$$

y si dividimos esta ecuacion ordenadamente por la anterior, tendremos,

$$\operatorname{tang}\frac{A}{2} = R\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-a)}}.$$

Cuando no haya necesidad de calcular mas que un ángulo, se

usará la fórmula que da el $\cos\frac{A}{2}$; pero si se piden los tres, se hará uso de la tercera.

101. Vamos á discutir la fórmula [66]; y digo ante todo que no es posible que los dos factores del numerador sean negativos, pues entonces tambien lo seria la suma, y esta es igual á $2\operatorname{sen}\frac{b+c}{2}\cos\frac{a}{2}$, que es una cantidad esencialmente positiva, porque segun la misma definicion de los triángulos esféricos cada lado es menor que 180°; luego es preciso que se verifique que $\operatorname{sen} p > 0$ y $\operatorname{sen}(p-a) > 0$. La primera de estas condiciones da que $p < 180°$, y por consiguiente que $2p < 360°$. La segunda se reduce á $a < b + c$. Tales son, pues, las condiciones necesarias para que el valor de $\cos\frac{A}{2}$ sea real.

Es necesario además que sea menor que el radio; por consiguiente

$$\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-a) < \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c,$$

ó bien (35)

$$\cos a - \cos(b+c) < \cos(b-c) - \cos(b+c),$$

desigualdad que se reduce á

$$\cos a < \cos(b-c).$$

Por lo tanto, si $a < 90°$, en cuyo caso el valor absoluto de $(b-c)$ es tambien $< 90°$, se tendrá

$$a > b - c,$$

suponiendo que $b > c$.

Si $a > 90°$ y $b - c < 90°$, tendremos

$$a > b - c;$$

y si $a > 90°$ y $b - c >$ tambien que 90° en valor absoluto, la desigualdad $\cos a < \cos(b-c)$ se reducirá aun en este caso (13) á

$$a > b - c.$$

Asi para que el triángulo sea posible, es necesario que la suma de sus tres lados sea menor que 360°, y que cada lado sea menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

102. 2.° CASO. *Conociendo dos lados* a *y* b *y el ángulo* A, *calcular el tercer lado* c *y los dos ángulos* B y C.

Se hallará el ángulo B por la fórmula

$$\operatorname{sen} B = \frac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a},$$

pero como viene dado por su seno *podrá* admitir dos valores suplementarios uno de otro, como discutiremos despues.

El ángulo C quedará determinado por el teorema del n.° 86.

$$\frac{\cot a}{\cot b} \cdot \frac{1}{\cos C} = 1 + \frac{\cot A}{\cot C} \cdot \frac{1}{\cos b},$$

ó bien

$$\cot a \operatorname{sen} b = \cos b \cos C + \cot A \operatorname{sen} C.$$

Para deducir de esta ecuacion el valor del ángulo C, aplicaremos á su segundo miembro el método del n.° 65, y dividiendo por $\cos b$, tendremos

$$\cot a \operatorname{tang} b = \cos C + \frac{\cot A}{\cos b} \operatorname{sen} C = \frac{\cos (C - \varphi)}{\cos \varphi},$$

de donde

$$\cos (C - \varphi) = \frac{\cos \varphi \operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a}.$$

El ángulo auxiliar φ á que hace referencia esta ecuacion, quedará determinado por la

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{R \cot A}{\cos b},$$

y determinado que sea en esta, calcularemos el $\pm (C - \varphi)$ por medio de la precedente, y luego con la mayor facilidad conoceremos C.

He escrito $\pm (C - \varphi)$ porque $\cos C \cos \varphi + \operatorname{sen} C \operatorname{sen} \varphi$ lo mismo representa el desarrollo de $\cos (C - \varphi)$ que el de $\cos (\varphi - C)$.

En cuanto al lado c, le hallaremos por el teorema fundamental

$$\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A + \cos b \cos c = \cos a,$$

que siguiendo tambien la marcha del n.° 65 dará

$$\cos (c - \psi) = \frac{\cos a \cos \psi}{\cos b}, \quad \operatorname{tang} \psi = \frac{\operatorname{tang} b \cos A}{R}.$$

Conviene observar que φ es el ángulo DCA (*Fig.* 24) que forma con AC el arco de círculo máximo que pasa por el vértice C y es perpendicular al lado AB, y que ψ es el segmento DA comprendido entre el punto D y el vértice A. En efecto, aplicando al triángulo

rectángulo ADC los teoremas de los n.os 87 y 86, se hallará

$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} \varphi \cos b = \cos A \cos \varphi, \quad \text{de donde} \quad \operatorname{tang} \varphi = \frac{\cot A}{\cos b},$$

$$\text{y} \quad \frac{\cot \psi}{\cot b} \cdot \frac{1}{\cos A} = 1 \quad \text{de donde} \quad \operatorname{tang} \psi = \cos A \operatorname{tang} b,$$

luego $ACD = \varphi$ y $AD = \psi$.

Resulta de aquí que c *y* C *son ambos mayores, ó ambos menores, que* ψ *y* φ.

103. Discusion. Podriamos discutir este problema siguiendo una marcha análoga á la del n.° 71; pero es mucho mas sencillo valernos de consideraciones puramente geométricas. Por esta razon, nos propondremos *construir un triángulo sobre una esfera dada, conociendo uno de sus ángulos* A, *y los dos lados* a *y* b.

Se trazan dos arcos de círculos máximos que formen entre sí un ángulo igual al A, sobre uno de los lados de este ángulo se toma un arco $AC = b$, y desde el punto C como polo y con una abertura de compás esférico igual á la cuerda del arco a, se describe otro arco de círculo que corte al otro lado en B, se unen C y B por un arco de círculo máximo, y queda resuelto el problema.

Hecho esto, se tirará por el punto C un arco CD de círculo máximo perpendicular á ABA′, y se considerarán dos casos principales, á saber, que el ángulo A sea agudo ó que sea obtuso (se excluye el caso en que sea recto, pues entonces el triángulo seria rectángulo).

1.° Sea $A < 90°$. Podrá suceder que b sea menor, igual ó mayor que 90°, y en cada uno de estos tres casos que el lado a sea mayor, igual ó menor que b.

Supongamos que $b < 90°$ y $a > b$: la circunferencia que hemos descrito tomando por polo el punto C y con una abertura de compas igual á la cuerda del arco a, envolverá á los puntos A y A′, si $a > CA' = 180° - b$; ó bien envolverá al punto A y pasará por A′, si $a = 180° - b$: luego es imposible el problema. Pero si $a < 180° - b$, la circunferencia envolverá siempre al punto A y cortará al arco ADA′ entre D y A′ (*); por consiguiente, habrá entonces una solucion. Además, el ángulo B será agudo, porque el lado opuesto

(*) Es menester no olvidar que por ser rectángulo en D el triángulo ACD, el arco CD y el ángulo A son de una misma especie (92) que *si el arco* CD *es* $< 90°$, *este arco será entonces menor que los arcos oblicuos que parten del mismo punto* C, *y que estos últimos aumentan conforme se alejan; que por el contrario, si el arco* $CD > 90°$.

CD es en el triángulo rectángulo CDB menor que 90^0 (92); por otra parte $c > \psi$ y $C > \varphi$.

Si $a = b$, la circunferencia cortará en A al arco ADA′ y además en un punto B situado entre D y A′, de manera que tambien habrá una solucion. En este caso $B = A$, $c > \psi$ y $C > \varphi$.

Supongamos que $a < b$, y podrá suceder una de tres cosas; que a sea menor, que sea igual, ó que sea mayor que el arco CD.

Si $a < CD$, la circunferencia no encontrará á ADA′ y será imposible el problema.

Si $a = CD$, tocará en D á ADA′, el ángulo B, igual en este caso á CDA, será recto, c será igual á ψ y C á φ.

Si $a > CD$, habrá dos intersecciones, una en B y otra en B′, cada una á diferente lado del punto D, y por consiguiente, se tendrán dos soluciones. Los dos valores de B serán suplementarios, porque el ángulo $DB'C = DBC$ y $AB'C = 180^0 - DB'C$. El ABC es agudo, pues es de la misma especie que el lado CD que se le opone en el triángulo rectángulo BDC (92). Además, $c > \psi$ y $C > \varphi$ corresponden al ángulo ABC y $c < \psi$ y $C < \varphi$ á su suplemento AB′C.

Supongamos que $b = 90^0$; en este caso, CA y CA′ son cuadrantes, de modo que si $a > b$ ó $a = b$ será imposible el problema. Mas si $a < b$ y $> CD$, habrá dos intersecciones y dos soluciones, á saber: $B < 90^0$, $c > \psi$, $C > \varphi$; y $B' = 180^0 - B$, $c < \psi$, $C < \varphi$.

Hagamos ahora la hipótesis de que $b > 90^0$: si $a > b$ ó $= b$, la circunferencia envolverá á los puntos A y A′, ó envolverá al punto A′ y pasará por A, de modo que será imposible el problema.

Si a es menor que $180^0 - b$, y *a fortiori* $< b$, habrá dos puntos de interseccion, uno entre A y D, y otro entre D y A′, siempre que sea $a > CD$: luego habrá dos soluciones como en el caso anterior.

Si siendo $a < b$ fuese $a = 180^0 - b$ ó $a > 180^0 - b$, cortaria la circunferencia á ADA′ entre A y D (*Fig.* 25) y pasaria por A′ ó envolveria este punto; luego no habria mas que una sola solucion, y el ángulo B seria obtuso, por ser suplemento del DBC que es agudo. Además $c < \psi$ y $C < \varphi$.

2.° Sea $A > 90^0$. La discusion es en este caso análoga á la del precedente

---

es mayor que los arcos oblicuos que parten del mismo punto C, *y que estos últimos disminuyen al alejarse.* Estas propiedades resultan de considerar el triángulo rectángulo CAD, en el cual se tiene $\cos AC = \cos CD \cos DA$ ([illegible]), haciendo crecer DA desde 0^0 hasta 180^0, y suponiendo CD constante, y primero $<$ y luego $>$ que 90^0.

Reasumiendo los resultados que hemos obtenido, se puede formar la siguiente tabla, no olvidando que *en el caso de que sea* $A < 90^0$, *si* B *es* $< ó > 90^0$, *los valores de* c *y* C *son respectivamente mayores ó menores que* ψ *y* φ, *y que lo contrario sucederá cuando* A *sea mayor que* 90^0.

$A<90^0$	$b<90^0$	$a>b$, $a=180^0-b$ ó $a>180^0-b$.	no hay solucion.	
		$a>b$, $a<180^0-b$	una.	$B<90^0$.
		$a=b$..	una.	$B=A$.
		$a<b$	dos.	$B<90^0$, $B>90^0$.
	$b=90^0$	$a>b$..	no hay solucion.	
		$a=b$..	no hay solucion.	
		$a<b$..	hay dos.	$B<90^0$, $B>90^0$.
	$b>90^0$	$a>b$..	no hay solucion.	
		$a=b$..	no hay solucion.	
		$a<b$ y $a<180^0-b$..	dos soluciones.	$B<90^0$, $B>90^0$.
		$a<b$ y $a=180^0-b$ ó $a>180^0-b$.	una solucion.	$B>90^0$.
$A>90^0$	$b<90^0$	$a>b$, $a=180^0-b$, ó $a<180^0-b$.	una.	$B<90^0$.
		$a>b$, $a>180^0-b$..	dos.	$B<90^0$, $B>90^0$.
		$a=b$..	no hay solucion.	
		$a<b$..	no hay solucion.	
	$b=90^0$	$a>b$..	dos soluciones.	$B<90^0$, $B>90^0$.
		$a=b$..	ninguna.	
		$a<b$..	ninguna.	
	$b>90^0$	$a>b$..	dos.	$B<90^0$, $B>90^0$.
		$a=b$..	una.	$B=A$.
		$a<b$, $a>180^0-b$..	una.	$B>90^0$.
		$a<b$, $a=180^0-b$ ó $a<180^0-b$..	ninguna.	

Antes de empezar la resolucion de un triángulo cuando se conozcan los lados a y b y el ángulo A, se debe consultar esta tabla y ver si el problema es ó no posible, y cuando lo sea, si admite una ó dos soluciones; despues se calculará el ángulo B por la fórmula

$$\operatorname{sen} B = \frac{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a},$$

y si el logaritmo de sen B resultase mayor que $\log R = 10$, seria prueba de que el problema era completamente imposible ($\operatorname{sen} CD = \operatorname{sen} A \operatorname{sen} b$); si log sen B no resulta mayor que log R, tomaremos para el ángulo B el valor que den las tablas, ó su suplemento, segun que el cuadro que precede nos haya indicado que este ángulo es agudo ú obtuso, y si este cuadro hubiera manifestado que hay dos soluciones, tomariamos para B el valor tabular y su suplemento.

Conociendo ya B, se tendrán los valores de c y C por las fórmulas que antes hemos establecido.

104. 3.er Caso. ***Resolver un triángulo cuando se conocen dos lados a y b y el ángulo comprendido C.***

Se conocerán las incógnitas, que son c, A y B por medio de los teoremas n.os **82** y **86**, y se hallará (**65**)

1.° $$\cos c = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C + \cos a \cos b$$
$$= \cos a \{ \operatorname{sen} b \operatorname{tang} a \cos C + \cos b \} = \frac{\cos a \cos(b-\varphi)}{\cos\varphi}.$$

El ángulo φ se determinará por la ecuacion

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\operatorname{tang} a \cos C}{R},$$

en la que ya se ha restablecido el radio

2.° $$\cot A = \frac{\cot a \operatorname{sen} b - \cos b \cos C}{\operatorname{sen} C}$$
$$= \cot C \left\{ \frac{\cot a}{\cos C} \operatorname{sen} b - \cos b \right\} = \frac{\cot C \operatorname{sen}(b-\varphi)}{\cos\varphi},$$

teniendo el ángulo φ el mismo valor que anteriormente.

3.° $$\cot B = \frac{\cot b \operatorname{sen} a - \cos a \cos C}{\operatorname{sen} C}$$
$$= \cot C \left\{ \frac{\cot b}{\cos C} \operatorname{sen} a - \cos a \right\} = \frac{\cot C \operatorname{sen}(a-\psi)}{\cos\psi},$$

en que el ángulo ψ está determinado por la ecuacion

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{\operatorname{tang} b \cos C}{R}.$$

105. 4.°, 5.° y 6.° Casos. Estos son en los que se dan

Dos ángulos y el lado adyacente;

Dos ángulos, y el lado opuesto á uno de ellos; ó

Los tres ángulos;

pero, con ayuda del triángulo suplementario, se reducen á los tres primeros casos. Con efecto, cuando en el cuarto se dan los ángulos A y B y el lado adyacente c, se conocen los dos lados a' y b', y el ángulo comprendido C′ en el triángulo suplementario; porque $a'=180°-A$, $b'=180°-B$ y $C'=180°-c$. Así pues, se podrán calcular c', A′ y B′ por las fórmulas del n.° **104**, y tomando sus suplementos, se tendrán los valores de C, a y b. De este modo, el cuarto caso se reduce al tercero, y de la misma manera se reducirian el quinto caso al segundo y el sexto al primero.

106. Analogías de Neper. *Néper*, inventor de los logaritmos, halló las siguientes fórmulas, que se conocen con el nombre de *Analogías de* Neper.

$$\operatorname{tang}\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cot\frac{C}{2},\qquad \operatorname{tang}\frac{A-B}{2}=\frac{\operatorname{sen}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{sen}\frac{a+b}{2}}\cot\frac{C}{2},$$

$$\operatorname{tang}\frac{a+b}{2}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\operatorname{tang}\frac{C}{2},\qquad \operatorname{tang}\frac{a-b}{2}=\frac{\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}}\operatorname{tang}\frac{C}{2}.$$

Nos limitaremos á demostrar directamente las dos primeras, pues las otras dos se deducen inmediatamente de ellas por medio del triángulo polar. Efectivamente, si en la primera, por ejemplo, se sustituyen en vez de A, B, C, a y b sus suplementos, resultará

$$-\operatorname{tang}\frac{a+b}{2}=\frac{+\cos\frac{B-A}{2}}{-\cos\frac{A+B}{2}}\times\operatorname{tang}\frac{C}{2}.$$

Para demostrar estas ecuaciones, han tenido los autores de los Anales de Matemáticas de *Gergone*, la feliz idea de valerse de las fórmulas que dan la tangente de la mitad de un ángulo de un triángulo esférico en funcion de sus lados, y modificando muy poco su método, se llega con mucha facilidad á las fórmulas de *Neper*.

Se trata de calcular en funcion de los lados la razon $\dfrac{\operatorname{tang}\frac{A\pm B}{2}}{\cot\frac{C}{2}}$;

pero es evidente que

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{A\pm B}{2}}{\cot\frac{C}{2}}=\frac{\operatorname{tang}\frac{A}{2}\pm\operatorname{tang}\frac{B}{2}}{1\mp\operatorname{tang}\frac{A}{2}\operatorname{tang}\frac{B}{2}}\operatorname{tang}\frac{C}{2}=\frac{\operatorname{tang}\frac{A}{2}\operatorname{tang}\frac{C}{2}\pm\operatorname{tang}\frac{B}{2}\operatorname{tang}\frac{C}{2}}{1\mp\operatorname{tang}\frac{A}{2}\operatorname{tang}\frac{B}{2}}.$$

Mas en el n.° 100 hemos hallado que

$$\operatorname{tang}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-a)}},$$

y por consiguiente, $\tang\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-b)}}$;

de donde resulta que $\tang\frac{A}{2}\tang\frac{B}{2}=\frac{\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}p}$,

por consiguiente $\tang\frac{A}{2}\tang\frac{C}{2}=\frac{\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen}p}$,

y $\tang\frac{B}{2}\tang\frac{C}{2}=\frac{\operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen}p}$;

luego sustituyenndo, será

$$\frac{\tang\frac{A\pm B}{2}}{\cot\frac{C}{2}}=\frac{\operatorname{sen}(p-a)\pm\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen}p\mp\operatorname{sen}(p-c)}.$$

Descomponiendo esta ecuacion en las dos que indica el signo de ambigüedad, transformando en productos las sumas y las diferencias de senos que resultan de esta descomposicion (34 y 35), y haciendo todas las reducciones que ofrecen los resultados, hallaremos,

$$\tang\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cot\frac{C}{2},\quad \tang\frac{A-B}{2}=\frac{\operatorname{sen}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{sen}\frac{a+b}{2}}\cot\frac{C}{2}.$$

Se usa de estas fórmulas para calcular mas sencillamente que como lo hicimos en el n.° **104**, los ángulos A y B en funcion de los dos lados a y b y del ángulo comprendido C. En cuanto al lado c, debe calculársele directamente, como en el n.° citado.

Esta solucion es completamente análoga á la del tercer caso de la resolucion de los triángulos rectilíneos (73).

107. Problema I. *Reducir un ángulo al horizonte.*

Supongamos que desde un punto dado O (*Fig.* 26) se hayan dirigido dos rayos visuales á los puntos A y B situados fuera del plano horizontal que pase por O; si por la vertical OZ y cada una de las rectas OA y OB se hacen pasar planos, sus trazas O′A′ y O′B′ sobre un plano horizontal cualquiera, formarán el ángulo A′O′B′ que es la proyeccion horizontal del AOB, y el que se llama *ángulo reducido al horizonte* de AOB. Este, pues, es el que se quiere calcular, y para conseguirlo, se empezará por medir los AOZ

y BOZ formados por los rayos visuales OA y OB con la vertical OZ; y si se imagina una esfera descrita desde O como centro y con un radio igual á la unidad lineal, sus trazas sobre las caras del ángulo triedro OABZ, formarán un triángulo esférico ABC cuyos lados *c*, *b*, *a* serán las respectivas medidas de los ángulos que se han observado AOB, AOZ y BOZ, al paso que el ángulo pedido A'O'B' será igual al C del triángulo esférico. Por esta causa calcularemos este por la ecuacion

$$\cos\frac{C}{2}=R\sqrt{\frac{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b}}.$$

Supongamos que $AOB=c=58^{0}0'5''$, $BOZ=a=88^{0}18'28'',8$,
$AOZ=b=94^{0}52'40'',8$:

tendremos $p=120^{0}35'37'',3$, $p-c=62^{0}35'32'',3$,
$180^{0}-p=59^{0}24'22'',7$, $180^{0}-b=85^{0}7'19'',2$.

$\log R^2=20$

$\log\operatorname{sen}p=9,934\ 9013$ $\qquad$ $\log\operatorname{sen}a=9,999\ 8106$

$\log\operatorname{sen}(p-c)=9,948\ 2924$ $\qquad$ $\log\operatorname{sen}b=9,998\ 4242$

$39,883\ 1937$ $\qquad$ $19,998\ 2348$

$19,998\ 2348$

$19,884\ 9589$

$\log\cos\frac{C}{2}=9,942\ 4794$

$\frac{C}{2}=28^{0}50'32'',5$ $\qquad$ $C=57^{0}41'5''$,

de modo que el ángulo reducido al horizonte vale $57^{0}41'5''$.

108. PROBLEMA II. *Dándose las latitudes y longitudes de dos puntos del globo, hallar su distancia.*

La latitud de un pueblo es el arco de meridiano comprendido entre este pueblo y el ecuador. Es boreal si el pueblo se halla en el hemisferio boreal, y austral cuando se halle en el austral.

La longitud de un pueblo es el arco del ecuador comprendido entre el meridiano del pueblo y el meridiano principal. Es oriental ú occidental segun qne el pueblo se encuentre situado al oriente ó al occidente del meridiano principal, ó primer meridiano, que varía para cada nacion, pues los franceses toman como tal al de París, y nosotros al de Madrid, y algunas veces, al del observatorio astronómico de San Fernando.

En los cálculos se toman como positivas á las latitudes boreales y longitudes orientales; y como negativas, las latitudes australes y longitudes occidentales.

Sean EE′ (*Fig.* 27) el ecuador, B y A los dos polos, BEA el meridiano principal y C y D los dos puntos del globo cuya distancia se pide. BCA y BDA serán sus meridianos, y por consiguiente, CC′ y DD′ sus latitudes, y EC′ y ED′ sus longitudes. Haciendo pasar por C y D un arco de círculo máximo, se formará un triángulo BCD, en el cual se conocen los lados CB y BD, complementos de las latitudes CC′ y DD′, y el ángulo CBD, que tiene por medida el arco C′D′, diferencia entre las longitudes ED′ y EC′. Para resolver el problema, se hará uso de las fórmulas 1.ª del n.º **104**, haciendo en ellas las hipótesis siguientes :

$$a = 90^\circ - CC', \quad b = 90^\circ - DD', \quad C = ED' - EC'.$$

Supongamos, por ejemplo, que se pide la distancia de París á Venecia, y tendremos

$$\text{París}\begin{cases}\text{latitud boreal} & = 48^\circ 50' 49'' \\ \text{longitud oriental} & = 0^\circ\ 0'\ 0'',\end{cases}$$

$$\text{Venecia}\begin{cases}\text{latitud boreal} & = 45^\circ 25' 53'' \\ \text{longitud oriental} & = 10^\circ\ 0' 44'',\end{cases}$$

por consiguiente,

$$a = 41^\circ 9' 11'', \quad b = 44^\circ 34' 7'', \quad C = 10^\circ 0' 44'',$$

$\log \text{tang}\, b =$	9,993 4600	$\log \cos(a - \varphi) =$	9,999 4139
$\log \cos C =$	9,993 3351	$\log \cos b =$	9,852 7304
	19,986 7951		19,852 1443
$\log R =$	10	$\log \cos \varphi =$	9,855 9871
$\log \text{tang}\, \varphi =$	9,986 7951	$\log \cos c =$	9,996 1572
$\varphi =$	$44^\circ 7' 44'',7$	$c =$	$7^\circ 36' 41''.$
$\varphi - a =$	$2^\circ 58' 33'',7$		

Como el arco c pertenece á un círculo cuyo radio es la unidad, para tener su longitud medida sobre la superficie de la tierra, nos valdremos de la proporcion

$$90^\circ : 7^\circ 36' 41'' :: 10000^{k \cdot m} : x,$$

que da para el valor que se busca $x = 846$ kilómetros, con un error que no llega á medio kilómetro.

FIN.

ÍNDICE DE LAS MATERIAS.

CAPÍTULO I.

NOCIONES PRELIMINARES.

CAPÍTULO II.

FUNCIONES CIRCULARES.

CAPÍTULO III.

CONSTRUCCION DE TABLAS TRIGONOMÉTRICAS.

CAPÍTULO IV.

FÓRMULAS PARA LA RESOLUCION DE LOS TRIÁNGULOS RECTILÍNEOS.

CAPÍTULO V.

RESOLUCION DE LOS TRIÁNGULOS RECTILÍNEOS.

CAPÍTULO VI.

APLICACIONES PRÁCTICAS DE LA TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA.

CAPÍTULO VII.

FÓRMULAS QUE SIRVEN PARA LA RESOLUCION DE LOS TRIÁNGULOS ESFÉRICOS.

CAPÍTULO VIII.

RESOLUCION DE LOS TRIÁNGULOS ESFÉRICOS.

FIN DEL ÍNDICE.

tórica sobre las corridas de toros, etc. Madrid. Un tomo en 18.º de bolsillo, encartonado. 2 pesetas.

Novísima Guia de conversaciones modernas en español y en francés: *nueva edicion* segun Pardal, Ochoa, Richard, Corona y Sadler. Un tomo en 18.º de bolsillo, encartonado, 1 peseta y 50 cént.

Novísima Guia de conversaciones modernas en español é inglés: *nueva edicion* segun Pardal, Ochoa, Richard, Corona y Sadler. Un tomo en 18.º de bolsillo, encartonado, 1 peseta y 50 cént.

Tratado práctico de Fotografía ó sea Química fotográfica, que contiene: Los elementos de Química explicados por medio de ejemplos aplicados á la fotografía.—Los procedimientos sobre cristal (colodion húmedo, seco ó albuminado), sobre papel y sobre placa.—El modo de preparar por sí mismo, ensayar y emplear todos los reactivos y de utilizar los residuos; escrito en francés por MM. BARRESWIL y DAVANNE; traducido al castellano y aumentado con los procedimientos conocidos hasta el dia, por D. Benito de Cereceda. Madrid, 1864. Dos tomos en 8.º ilustrados con 93 magníficos grabados en madera intercalados en el texto y encuadernados en tela á la inglesa; 11 pesetas en Madrid y 12 en provincias, franco de porte.

Tratado elemental de Física experimental y aplicada, y de Meteorología. Seguido de una coleccion de 100 problemas con sus soluciones, ilustrado con mas de 920 grabados intercalados en el texto y una lámina iluminada: por A. GANOT, profesor de Matemáticas y de Física. *Ultima edicion francesa* aumentada respecto á las anteriores con varias teorías y aparatos nuevos. Difusion, dialisis, oclusion, disociacion, termodinámica, nueva teoría de la electricidad, máquina neumática de mercurio de Morren, experimentos de Helmholtz sobre la análisis y la síntesis de los sonidos, llamas manométricas de Kœnig, máquina dieléctrica de Carré, termómetro eléctrico de Becquerel, pirómetro eléctrico de Ed. Becquerel, aparato para la rotacion electro-dinámica y electro-magnética de los líquidos por Bertin, conmutador del mismo, telégrafo autográfico de hélice de Meyer, galvanómetro receptor de William Thomson, máquina electro magnética de Gramme, etc. Traducida, anotada y ampliada en la parte de Mecánica con las teorías de las fuerzas, movimientos, centro de gravedad y máquinas: por D. Eduardo Sanchez Pardo y D. Eduardo Leon, auxiliares del Observatorio astronómico de Madrid. Madrid, 1872. Un tomo en 8.º, ilustrado con muchos grabados, 10 pesetas en Madrid y 11 en provincias, franco de porte.

Elementos de Geometría analítica, escritos en francés con arreglo al programa de admision en las Escuelas politécnica y normal superior, por H. SONNET, doctor en ciencias, inspector de la Academia de Paris, y G. FRONTERA, doctor en ciencias, profesor de matemáticas en el Liceo imperial de San Luis: y traducido al castellano de la última edicion francesa, por D. Manuel María Barbery, profesor de matemáticas. Madrid, 1867. Un tomo en 8.º, con láminas, 8 pesetas en Madrid y 9 en provincias, franco de porte.

Nueva legislacion de Minas. Decreto de 29 de diciembre de 1868. Anotado por D. Fernando de MADRAZO, abogado del Colegio de Madrid. Madrid. Un tomo en 12.º, 2 pesetas en Madrid y 2 pesetas y 25 cént. en provincias, franco de porte.

Esta obra es indispensable á todas las Sociedades mineras, á los socios, abogados, etc.

Chamartin de la Rosa.—Imp. de C. Bailly-Bailliere.

5.

6.

7.

12.

13.

17.

18.

25.

26.

27.